0. 引言

什么是代数几何?

这个问题似乎不难解释。自从 17 世纪 30 年代费尔马 (Fermat) 和笛卡儿 (Descartes) 建立直角坐标系, 就可以进而建立代数曲线、代数曲面等概念, 例如方程 $y^2 = x^3 - x$ 定义一条平面代数曲线, 方程 $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ 定义三维空间中的一个代数曲面。更一般地可以考虑任意维空间中由一组多项式方程的公共零点组成的集合 (称为一个"代数集"), 这些就是代数几何的基本研究对象。

然而代数几何何以会成为一门独立的数学分支呢? 事实上, 代数几何作为一个分支从其他学科中独立出来不过是一百多年的事。独立出来的原因可以从两个方面解释: 一方面, 代数集有许多特殊的性质是其他几何对象所没有的, 而且在代数集的研究中发展出一些特别的方法; 另一方面, 代数几何是几何与数论间的一个桥梁, 其中有许多方法和结果有数论背景。

按 Mumford 的观点, 可以大略把代数几何的发展史分为四个时期: 一、 19 世纪后期, 以诺特、希尔伯特等为代表的德国学派领导潮流, 系统地建立了代数方法, 产生了特征 p 的几何, 奠定了代数曲线理论的基础如黎曼-罗赫定理; 二、 1900-1930 年间, 以 Castelnuovo, Enriques 和 Severi 为代表的意大利学派领导潮流, 将 19 世纪对代数曲线所做的工作推进到 (复) 代数曲面上, 此外深入探讨了纯代数几何方法与拓扑、分析方法之间的联系, 但由于所用方法颇有差别且富有直观性, 常忽略一些细节及一些复杂的特殊情形; 三、 1930-1960 年间, Zariski, Weil 以及最后 Grothendieck 领导潮流, 系统地建立了交换代数工具并建立了一套公共语言, 例如可以处理特征 p 的情形 (其目的可以追溯到 Kronecker, 即建立一种可以处理算术的几何, 对此目的曾有过若干种尝试, 经过一段混乱的时期后, Grothendieck 的概形方法和语言被普遍接受作为一种基础); 四、 1960 年以后, 代数几何在各方面迅速发展: 对维数 > 2 的几何、奇异性及闭链 (cycle) 等

深入研究, 发现代数簇的拓扑性质与丢番都性质间的深刻联系, 以及建立参量空间理论等, 其中很多强有力的结果由复几何方法和分析方法获得, 常常是代数方法不能或很难替代的。

代数几何与许多其他学科有密切联系, 拓扑、微分几何、复几何、分析、代数、数论等都在代数几何中有重要应用, 而代数几何的发展也对许多其他学科产生了影响。按照 Dieudonné 的观点, 代数学是由代数数论和代数几何两个方面激发的 (这是一种通过观察人类文明史而提出的哲学观点, 并非仅指现代代数学; 如同另一些学者指出的, 现代代数学还受到一些其他方面的激发, 例如代数拓扑就起了极其重要的影响)。在今天, 代数几何的方法和结果广泛应用于其他几何、代数数论、代数、编码、计算数学、数学物理、机械化证明等许多方面。因此, Mumford 认为代数几何作为一种数学修养, 对纯粹数学各学科的工作者都是有益的。

很难系统地介绍与代数几何有关的各方面的问题, 我们仅举几个例子说明这些问题的多样和广泛, 其中有些问题将在后面深入讨论。

例 1. 代数方程组的解

在对一组多元代数方程 (即多项式方程) 作数值解之前, 至少需要弄清是否有解, 解的个数是否有限, 如果有限究竟有多少个, 等等。对于线性方程组, 我们知道有三种可能的情形: 无解, 恰有一组解, 无限多组解。一般是考虑方程个数与变元个数相同的情形, 此时无限多组解的出现是因为方程组线性相关, 这可以理解为 “有多余方程”; 而无解的情形可以理解为“解在无穷远处”, 如果考虑射影空间就可以把无解的情形与一个解的情形同样处理。对一元高次方程, 我们知道解的个数若计入重数恰等于方程的次数, 这个结果是不是可以推广到多元高次方程组呢? 首先, 受线性情形的启发, 我们应该先考虑在射影空间中的解 (然后把无穷远处的解去掉); 其次要考虑无穷多组解的情形, 这比线性情形复杂得多, 不一定是由于多余方程造成的, 而且所需要的方程个数可能多于变元个数 (这是在一元情形和线性情形都不会出现的); 再次, 定义解的重数也不是简单的事。在二元的情形, Bézout 定理完整地回答了这个问题 (详见例 Ⅲ.3.3)。在这个方向对一般情形的更深入研究产生了*相交理论*, 这是代数几何中的基本工具之一。

例 2. 纯超越扩域的子域

在域论里有这样一个难题: 设 L 为 F 的纯超越扩域 (即由 F 添加一组在 F 上代数无关的元生成的扩域), $K \subset L$ 为包含 F 的子域, 若 L 是 K 的代数扩张, K 是否也是 F 的纯超越扩张? 这个问题是用了代数几何的方法才解决的, 答案是: 若 $\mathrm{tr.deg}(L/F) = 1$ 回答是肯定的; 若 $\mathrm{tr.deg}(L/F) = 2$ 且 F 是代数闭域回答也是肯定的; 而若 $\mathrm{tr.deg}(L/F) > 2$ 回答是否定的 (参看例 Ⅳ.4.3)。

例 3. 紧致黎曼面

黎曼面就是一维复流形, 所有紧致黎曼面都是代数流形, 换言之都是复代数曲线, 它们都可以嵌入三维复射影空间 $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ 中作为代数子集, 而作为实流形它们是紧致双侧曲面。黎曼面的奠基性研究是用复分析和复几何的方法, 而其中很多结果可以推广到一般域上 (参看 Ⅳ.2 和 Ⅳ.4)。

例 4. 构形定理

在射影几何中我们知道, 除了简单的结合性质 (如“过两点存在唯一直线”) 外, 还有一些复杂 (往往具有很强的对称性) 的只与结合性有关的定理 (“构形定理”), 如德萨格定理 (图 1) 说, 对任两个三角形 ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$, 令 P, Q, R 分别为 AB 与 $A'B'$ 的交点, BC 与 $B'C'$ 的交点, CA 与 $C'A'$ 的交点, 若 AA', BB', CC' 三条直线交于一点则 P, Q, R 三点在一条直线上; 帕普斯定理 (图 2) 说: 若 A, B, C 三点在一条直线上, A', B', C' 三点在一条直线上, AB' 与 $A'B$ 交于 P, BC' 与 $B'C$ 交于 Q, CA' 与 $C'A$ 交于 R, 则 P, Q, R 三点在一条直线上。这两个定理有特别重要的意义 (详见附录 B): 对任意一种公理式平面射影几何 (即假定简单的结合公理), 德萨格定理成立当且仅当这种几何等价于一个体 K 上的二维射影几何, 而此时帕普斯定理成立当且仅当 K 是域。

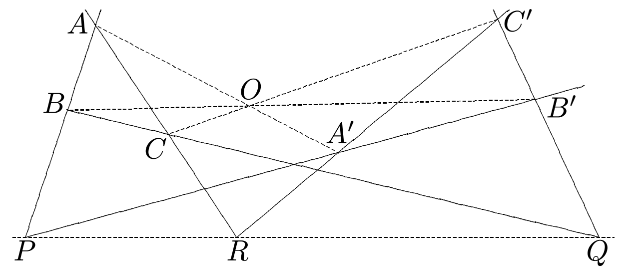

图　1

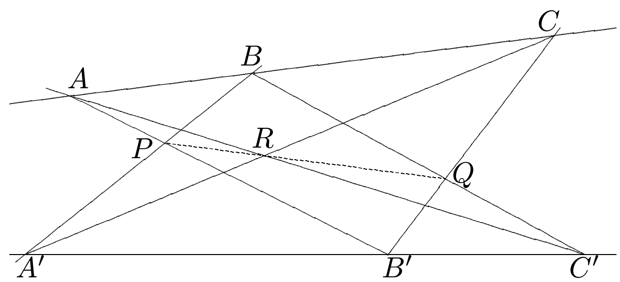

图　2

对二次曲线也有类似的构形定理, 如巴斯加定理说, 在任一条二次曲线上任取 6 个点 A, B, C, D, E, F, AB 与 DE 交于 P, BC 与 EF 交于 Q, CD 与 FA 交于 R, 则 P, Q, R 三点在一条直线上 (图 3)。这个定理也有特殊的重要性, 它是二次曲线的基本性质 (判据)。

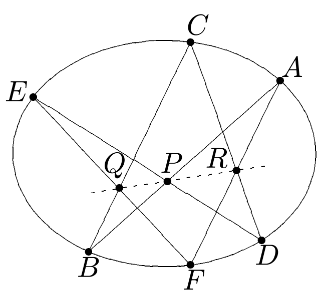

图　3

对三次曲线也有类似的定理, 如: 在任一条三次曲线上任取

4 个点 A,B,C,D, 直线 BC 与曲线有第三个交点 E, BD 与曲线有第三个交点 F, AD 与曲线有第三个交点 G, CG 与曲线有第三个交点 H, AE 与曲线有第三个交点 I, 则 F,H,I 三点在一条直线上 (图 4)。这个定理的意义我们以后再解释 (参看引理 Ⅳ.3.1 的证明)。

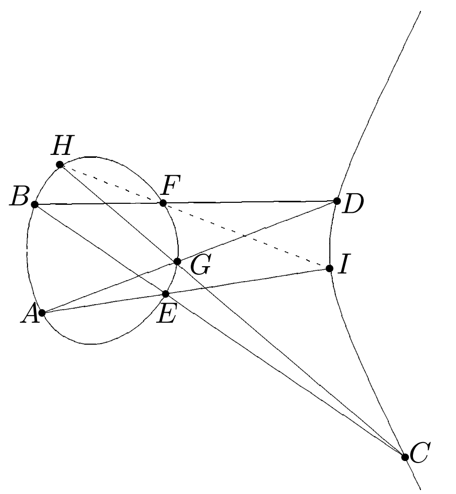

图 4

上面的几个定理绝非仅仅是一种游戏 (“有观赏价值”), 恰恰相反, 它们是几个有关学科中重要的基本定理 (详见附录 B, 例 Ⅲ.3.1 和引理 Ⅳ.3.1 的证明)。

例 5. 计数几何 (Enumerative Geometry)

这种几何研究某种对象有多少个, 如 McLaurin (1720) 考虑射影平面上的一条 d 次光滑曲线有多少条切线通过一个给定点, 答案是对“一般位置”的给定点有 $d(d-1)$ 条; Steiner (1848) 考虑射影平面上与五条给定的二次曲线都相切的二次曲线有多少条, 答案是在“一般情形”有 6^5 条。这类问题也与相交理论密切相关 (参看例 Ⅲ.4.3)。

例 6. 多项式不变量

线性表示的多项式不变量是表示论中的一个重要研究课题,

事实上主要是考虑有限群和代数群 (代数群也是代数几何的研究对象)。从代数几何的角度, 这个问题可以看作商空间的代数函数环的结构问题, 而从商空间的几何结构考虑问题不仅给出另一种观点和方法, 而且可以使研究更为深入。

例 7. 分类问题

在许多学科 (包括代数几何) 中分类问题都是最重要的基本问题之一, 例如紧致双侧 (实) 曲面 (如紧致黎曼面) 的拓扑结构由其亏格唯一决定, 这里亏格是一个离散的 (只取非负整数值) 拓扑不变量; 有限维复半单李代数在同构之下由其 Dynkin 图唯一决定, 这里 Dynkin 图也是一个离散不变量。在代数几何里不仅有许多种离散不变量, 而且有连续不变量, 例如二维射影空间 (齐次坐标为 X, Y, Z) 中的三次光滑曲线

$$Y^2 Z = X(X - Z)(X - \lambda Z) \qquad (\lambda \neq 0, 1)$$

有一个不变量 (j-不变量) $2^8 \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$, 而二维射影空间中的三次光滑曲线在 (解析或代数) 同构之下由其 j-不变量唯一决定。这种连续不变量的进一步深入探讨导致参量空间的概念 (参看 V.1)。

例 8. 丢番都 (Diophantus) 方程

丢番都方程的问题 (即代数方程的整数解问题) 都可以用代数几何的语言来表述, 例如费尔马大定理可以表述为曲线 $x^n + y^n = 1$ ($n > 2$) 没有非平凡的有理点 (注意这种表述与代数坐标的选取无关)。如所周知, 莫德尔猜想 (Faltings 定理) 说, 任一亏格 > 1 的紧致黎曼面上至多有有限多个有理点。莫德尔猜想和费尔马大定理的证明都涉及参量空间。 Oort 指出, 对这两个定理的证明都只有从几何图象上才能清楚地理解。

代数几何不是一门“原创的”学科, 即可以建立在一组简洁的公理或定义上的学科, 它毋宁说是一种“综合的”学科, 其研究方法非常多样, 不同时代、不同学派的风格千差万别, 教科书也有多种模式, 甚至没有大体一致的基本内容, 这是与其它学科很不相同的。举三个典型的例子: Hartshorne 的书 [4] 采用代数方法, 需要很强的交换代数和同调代数基础, 但不需要复几何的基础;

Griffiths 和 Harris 的书 [2] 用的是复几何的方法, 但基本上不需要代数方面的基础; Mumford 的书 [13] 则需要拓扑、微分几何、复分析、交换代数等多方面的基础, 但各方面所用的知识都不很深。准备深入学习代数几何的读者对此需要有所选择 (一般是以一种模式为主, 参考其他模式)。在本书中主要采用代数方法。