附录 B. 公理式射影几何与体上的射影几何

在引言的例 4 中我们提到德萨格定理和帕普斯定理在公理式射影几何中的重要意义。我们下面对此作一个详细的介绍。

1. 射影公理

设 K 是一个体。易见 K 上的三维射影空间 P_K^3 具有下列性质:

i) 过任意两点存在唯一直线;
ii) 同一平面上的任意两条直线必相交;
iii) 任一直线上至少有 3 个点 (因为有一个无穷远点);
iv) 任一平面上存在不共线的 3 个点;
v) 过任意不共线的三点存在唯一平面;
vi) 任一平面包含过其中任两点的直线;
vii) 任两个平面至少有两个公共点;
viii) (空间中) 存在不共面的 4 个点。

其中 i-iv) 可以看作射影平面 P_K^2 所满足的性质。

设 l 是 P_K^2 中的一条直线。在 l 上任意取定一点作为“无穷远点” (记为 ∞), 在其余的点中任取原点 (记为 0) 和坐标为 1 的点, 这样就可以 (唯一地) 建立 l 上的坐标系, 其中除 ∞ 外的点和 K 的元一一对应, 为方便起见我们有时将 $l-\{\infty\}$ 就记作 K。不难验证 K 的体结构可以用下面的几何方法给出。

A) 加法 (见图 1.1): 对任两个元 $a, b \in K$, 过 a, b 各任取一条异于 l 的直线 l_a, l_b, 过 0 任取一条异于 l 的直线与 l_a, l_b 分别交于 D, C, 令 A 为 $C\infty$ 与 l_a 的交点, B 为 $D\infty$ 与 l_b 的交点, 则 AB 与 l 的交点即为 $a+b$。

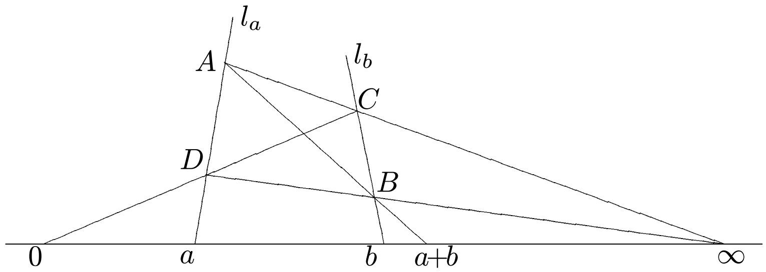

图　1.1

B) 乘法 (见图 1.2): 对任两个元 $a, b \in K$, 过 a, b 各任取一条异于 l 的直线 l_a, l_b, 过 1 任取一条异于 l 的直线与 l_a, l_b 分别交于 D, C, 令 A 为 $C\infty$ 与 l_a 的交点, B 为 $0D$ 与 l_b 的交点, 则 AB 与 l 的交点即为 ab。

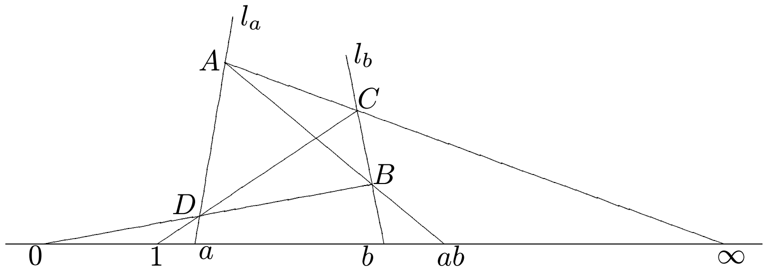

图　1.2

如果 K 是域, 则乘法交换律 $ab = ba$ (见图 1.3) 说明帕普斯定理成立: 在同一平面中, 若 A, B, C 三点共线 (即在同一条直线上), A', B', C' 三点共线, AB' 与 $A'B$ 交于 P, BC' 与 $B'C$ 交于 Q, CA' 与 $C'A$ 交于 R, 则 P, Q, R 三点共线。反之, 若帕普斯定理成立, 则对任意 $a, b \in K$ 有 $ab = ba$。总之有

命题 1. 设 K 为体, 则 K 是域当且仅当在 P^2_K 中帕普斯定理成立。

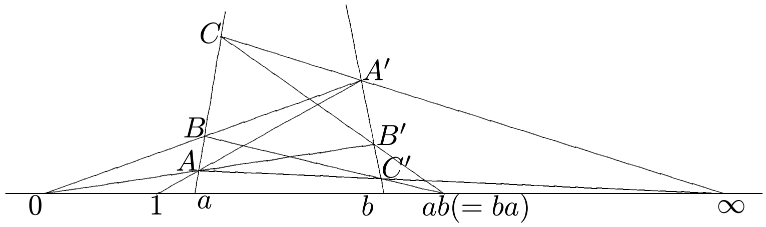

图 1.3

2. 公理式射影几何

公理式射影几何只关心"结合性质" (某点在某直线上, 某直线在某平面中, 等等), 所以在欧几里德公理系统中只取结合公理, 但把平行公理变相地加进来。这样, 一个"三维射影空间"就是一个集合 V, 其中给定了一些子集, 分别称为"平面"和"直线", 满足上节中的公理 i-viii)。

命题 1. 由公理 i-viii) 可以推出德萨格定理 (见图 2.1): 对任两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$, 若 AA', BB', CC' 三条直线交于一点 O, 则 AB 与 $A'B'$ 交于一点 P, BC 与 $B'C'$ 交于一点 Q, CA 与 $C'A'$ 交于一点 R, 且 P, Q, R 三点共线。

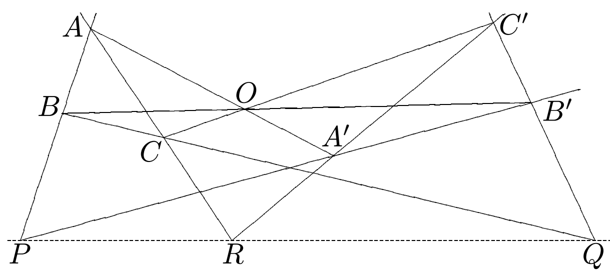

图 2.1

证. 为方便起见, 我们下面把包含三个点 X, Y, Z 的唯一平面简称为 "平面 XYZ"。

情形 1: 平面 $ABC \neq$ 平面 $A'B'C'$ (见图 2.2)。令 l 为平面 ABC 与平面 $A'B'C'$ 的交线。由所设可见 A', B' 都在平面

OAB 中, 故 AB 与 $A'B'$ 交于一点, 记为 P。由于 P 既在平面 ABC 中又在平面 $A'B'C'$ 中, 可见 $P \in l$。同理 BC 与 $B'C'$ 交于一点 Q, CA 与 $C'A'$ 交于一点 R, 且 $Q, R \in l$。从而 P, Q, R 三点共线。

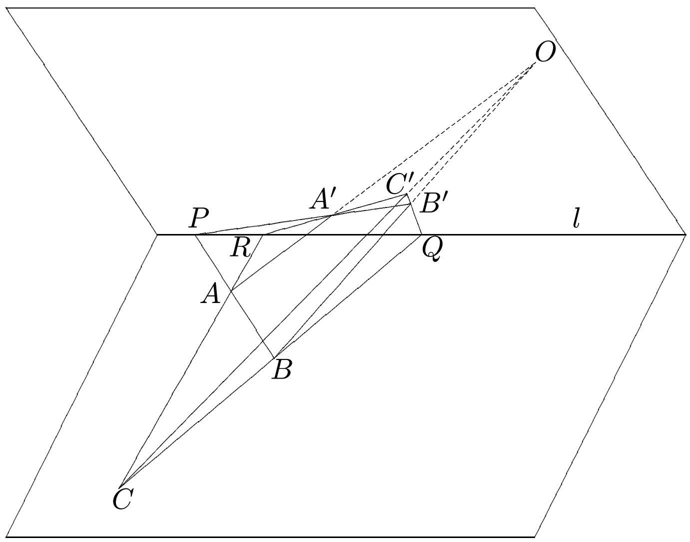

图 2.2

情形 2: 平面 $ABC =$ 平面 $A'B'C'$ (见图 2.3)。在平面 ABC 外任取一点 O', 并在直线 OO' 上任取异于 O, O' 的一点 O''。由所设可见 A', O'' 在平面 OAO' 中, 故 $O'A$ 与 $O''A'$ 交于一点 A''。同理 $O'B$ 与 $O''B'$ 交于一点 B'', $O'C$ 与 $O''C'$ 交于一点 C''。显然平面 $A''B''C'' \neq$ 平面 ABC, 令 l 为平面 $A''B''C''$ 与平面 ABC 的交线。令 P 为 $A''B''$ 与 l 的交点, 则由情形 1 可见 $A''B''$ 与 AB 相交, 且交点只能是 P, 同样 $A'B'$ 也过点 P, 即 AB 与 $A'B'$ 交于 l 上的一点 P。同理 BC 与 $B'C'$ 的交点 Q 和 CA 与 $C'A'$ 的交点 R 也在 l 上。证毕。

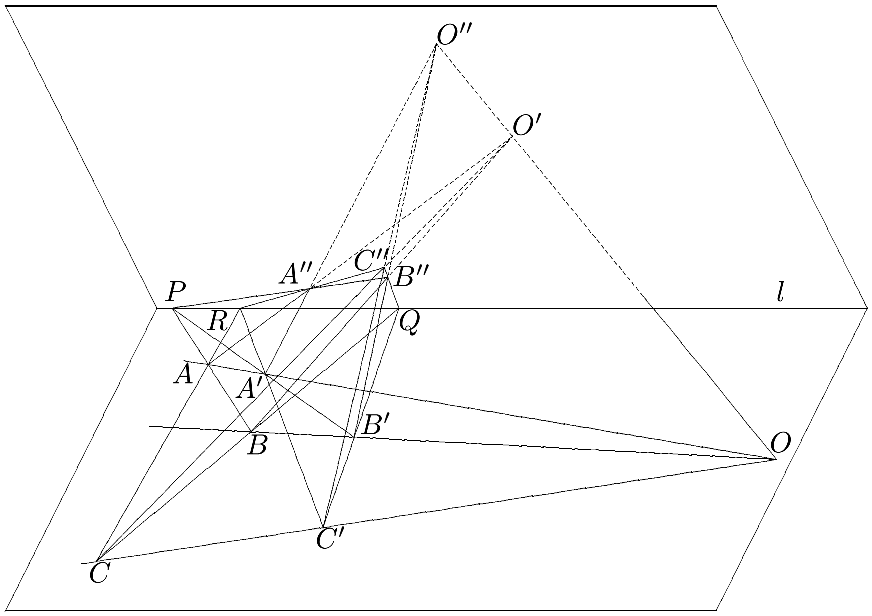

图 2.3

推论 1. 对任意体 K 上的射影平面 P_K^2 和三维射影空间 P_K^3, 德萨格定理成立。

这是因为 P_K^3 满足 i-viii), 而 P_K^2 可以看作 P_K^3 中的平面。

德萨格定理等价于它的逆定理: 对任两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$, 若 AB 与 $A'B'$ 交于一点 P, BC 与 $B'C'$ 交于一点 Q, CA 与 $C'A'$ 交于一点 R, 且 P, Q, R 三点共线, 则 AA', BB', CC' 三条直线交于一点 O。事实上, 德萨格定理和它的逆定理完全是一回事, 只是各点的记号不同而已: 在图 2.1 中, 注意 $\triangle AA'P$ 和 $\triangle CC'Q$, 可见 AA' 与 CC' 的交点为 O, $A'P$ 与 $C'Q$ 的交点为 B', AP 与 CQ 的交点为 B, 故德萨格定理的逆定理断言若 B, B', O 三点共线, 则 PQ, AC, $A'C'$ 三线交于一点, 这正是德萨格定理的断言!

如果只考虑二维射影空间, 则只有公理 i-iv) 是用得着的, 但由公理 i-iv) 是推不出德萨格定理的, 这由下面的反例可以看出。

例 1. 在寻常的坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 定义"直线"为与 X-轴或 Y-轴平行的直线和形如图 2.4 中的折线 MPN, 其中 PN 的斜率是 MP 的斜率的 2 倍。对每一组互不相交的这种"直线"赋予一个共同的"无穷远点", 并规定所有"无穷远点"组成一条"无穷远直线", 这样就建立了一个"射影平面"。不难验证这个"射影平面"满足公理 i-iv), 但德萨格定理不成立。

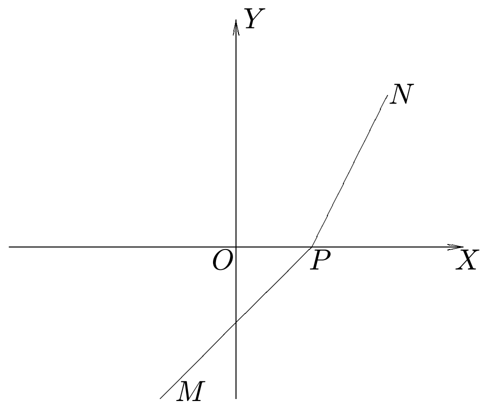

图 2.4

在公理式平面射影几何中常把德萨格定理加进去作为一条公理, 原因见下节。

3. 等价性定理

在公理式射影几何中, 是不是每个射影平面都是某个体上的射影平面呢? 由上一节我们看到, 必需假定德萨格定理成立才可能有肯定的答案。在本节中我们证明, 任一满足公理 i-iv) 及德萨格定理的射影平面一定是某个体上的射影平面。

首先我们考虑这样的射影平面中的一条任意的直线 l。由公理 iii) 可取 l 上的 3 个点, 称其中的一个点为"无穷远点" (记为 ∞), 一个点为"坐标原点" (记为 0), 一个点为"单位元" (记为 1), 且令 $K = l - \{\infty\}$。我们来验证 K 具有一个体结构, 它的加法和乘法分别由图 1.1 和图 1.2 给出。为方便起见我们用下列记号:

对任意 6 个点 A, B, C, A', B', C', 用 $ABC \downarrow A'B'C'$ 简记"对 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 应用德萨格定理", 而用 $ABC \uparrow A'B'C'$ 简记"对 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 应用德萨格定理的逆定理"。

引理 1. 设 Π 为满足公理 i-iv) 及德萨格定理的射影平面, l 为 Π 中的直线, 在其上取定了三个点 $0, 1, \infty$, 而 $K = l - \{\infty\}$。则由图 1.1 和图 1.2 可以定义 K 的加法和乘法运算, 在这两个运算下 K 是一个体, 其中 0 和 1 分别为零元和单位元。

证. 首先我们验证图 1.1 和图 1.2 给出的加法和乘法的定义是合理的, 即与其中任意选取的直线无关。

加法 (见图 3.1): 采用图 1.1 的记号, 过 a, b 各另任取一条异于 l 的直线 l'_a, l'_b, 过 0 另任取一条异于 l 的直线与 l'_a, l'_b 分别交于 D', C', 令 A' 为 $C'\infty$ 与 l'_a 的交点, B' 为 $D'\infty$ 与 l'_b 的交点, 我们验证 $A'B'$ 与 l 的交点和 AB 与 l 的交点相同, 换言之 $A'B'$ 与 AB 的交点在 l 上。由 $ADC \uparrow A'D'C'$ 可见 AA', DD' 和 CC' 三线共点, 由 $BDC \uparrow B'D'C'$ 可见 BB', DD' 和 CC' 三线共点, 故 AA', BB' 和 CC' 三线共点, 再由 $ABC \downarrow A'B'C'$ 可见 AB 和 $A'B'$ 的交点在 l 上。

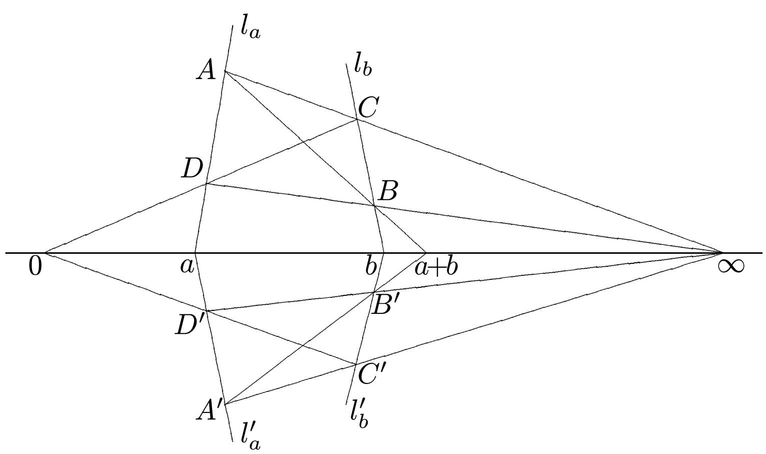

图 3.1

乘法 (见图 3.2): 采用图 1.2 的记号, 过 a, b 各另任取一条

异于 l 的直线 l'_a, l'_b, 过 1 另任取一条异于 l 的直线与 l'_a, l'_b 分别交于 D', C', 令 A' 为 $C'\infty$ 与 l'_a 的交点, B' 为 $0D'$ 与 l'_b 的交点, 我们验证 $A'B'$ 与 l 的交点和 AB 与 l 的交点相同, 换言之 $A'B'$ 与 AB 的交点在 l 上。由 $ADC \uparrow A'D'C'$ 可见 AA', DD' 和 CC' 三线共点, 由 $BDC \uparrow B'D'C'$ 可见 BB', DD' 和 CC' 三线共点, 故 AA', BB' 和 CC' 三线共点, 再由 $ABC \downarrow A'B'C'$ 可见 AB 和 $A'B'$ 的交点在 l 上。

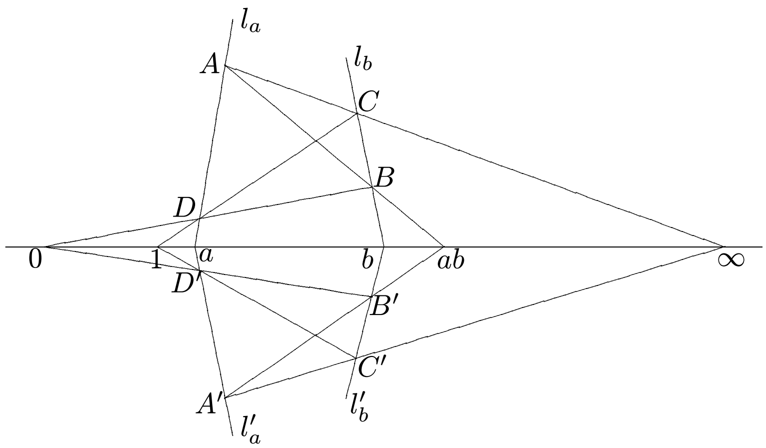

图 3.2

下面我们对 K 来验证体的各条公理。首先, 由定义易见 0 为加法的零元, 1 为乘法的单位元, 0 为乘法的零元 (即 $a0 = 0a = 0$ 对任意 $a \in K$ 成立), 且加法满足交换律。下面验证其他各条。

i) 加法结合律 (见图 3.3): 用图中的记号, 由 $PQ\infty \downarrow SRT$ 可见 A, B, B' 共线, 由 $RU\infty \downarrow QVW$ 可见 A, A', B' 共线, 故 A, B, A', B' 四点共线。由定义可知 AB 与 l 的交点为 $(a+b)+c$, 而 $A'B'$ 与 l 的交点为 $a+(b+c)$, 这就证明了 $(a+b)+c = a+(b+c)$。

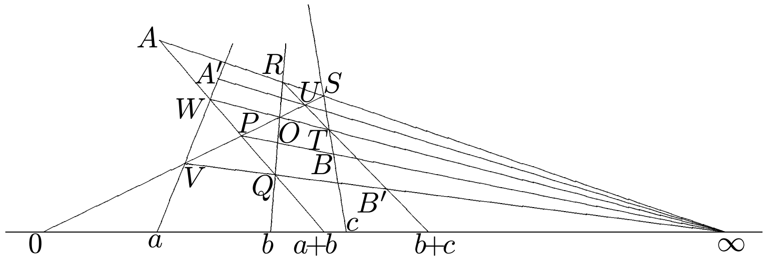

图　3.3

ii) 乘法结合律 (见图 3.4): 用图中的记号, 由 $0PQ \downarrow SRT$ 可见 A, B, B' 共线, 由 $TU\infty \downarrow QVW$ 可见 A, A', B' 共线, 故 A, B, A', B' 四点共线。由定义可知 AB 与 l 的交点为 $(ab)c$, 而 $A'B'$ 与 l 的交点为 $a(bc)$, 这就证明了 $(ab)c = a(bc)$。

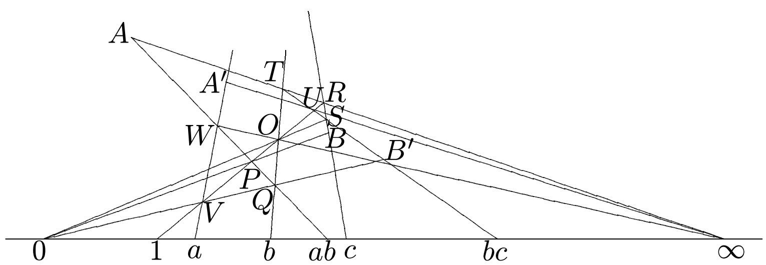

图　3.4

iii) 负元与逆元 (见图 3.5 和图 3.6): 图 3.5 给出 $-a$, 而图 3.6 给出 a 的逆元。

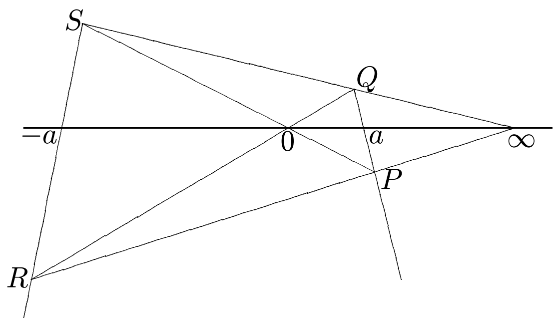

图 3.5

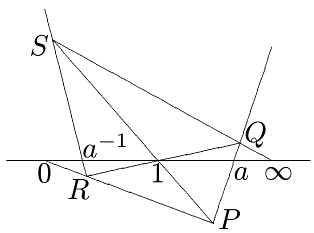

图 3.6

iv) 乘法分配律 (见图 3.7 和图 3.8): 由乘法结合律及 0 为乘法零元, 我们只需验证 $a(b+1)=ab+a$ 及 $(a+1)b=ab+b$ 对任意 $a,b\in K$ 成立。在图 3.7 中, 由 $\infty TS\downarrow PQR$ 可见 A,B,B' 共线, 注意 AB 与 l 的交点为 $a(b+1)$ 而 AB' 与 l 的交点为 $ab+a$, 即得 $a(b+1)=ab+a$; 在图 3.8 中, 由定义可知 AB 与 l 的交点为 $(a+1)b$, 另一方面, 由 $SAR\downarrow 0PQ$ 可见 O,B,∞ 共线, 即 $O\infty$ 与 RS 交于 B, 从而由定义可知 AB 与 l 的交点为 $ab+b$, 这就得到 $(a+1)b=ab+b$。

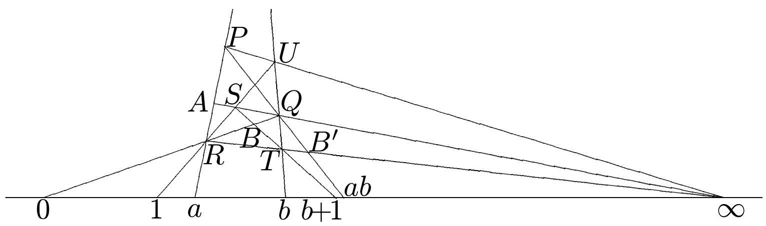

图 3.7

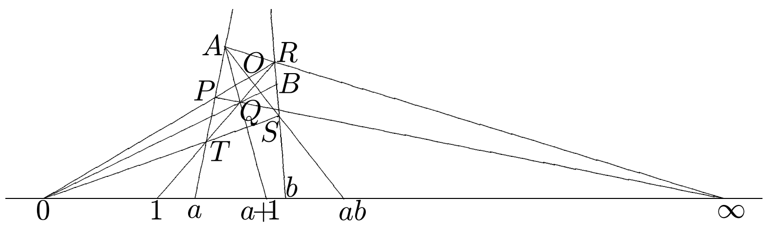

图 3.8

综上所述 K 是一个体。证毕。

设 l, l' 为射影平面 Π 中的直线, 在 l 上取定无穷远点 ∞, 原点 0 和单位元 1, 并记 K 为 $l-\{\infty\}$ 的体结构; 对 l' 也取定无穷远点, 原点和单位元, 分别记为 ∞', $0'$ 和 $1'$, 并记 K' 为 $l'-\{\infty'\}$ 的体结构。设 O 为不在 l, l' 上的一点。对任意 $A \in l$, 令 $\phi(A)$ 为 OA 与 l' 的交点, 这样显然定义了一个一一映射 $\phi: l \to l'$, 称为以 O 为中心的从 l 到 l' 的投影。

引理 2. 设 ϕ 满足 $\phi(\infty) = \infty'$, 则 ϕ 在 K 上的限制满足

i) 若 $\phi(0) = 0'$, 则 ϕ 保持加法运算 (即 $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$);

ii) 若 $\phi(0) = 0'$ 且 $\phi(1) = 1'$, 则 ϕ 保持乘法运算 (即 $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$), 从而 ϕ 诱导 K 到 K' 的同构。

证. 任取 $a, b \in K$, 记 $\phi(a) = a'$, $\phi(b) = b'$, 且记 V 为 l 和 l' 的交点。

i) (见图 3.9) 记 $0a'$ 与 Ob 的交点为 C, ∞C 与 Oa 的交点为

A, $\infty a'$ 与 Ob 的交点为 B, $0'a$ 与 Ob 的交点为 C', $\infty'C'$ 与 Oa 的交点为 A', $\infty'a$ 与 Ob 的交点为 B', $0a'$ 与 $0'a$ 的交点为 P, $a'\infty$ 与 $a\infty'$ 的交点为 Q, $A\infty$ 与 $A'\infty'$ 的交点为 R, AB 与 $A'B'$ 的交点为 S, 则 AB 与 l 的交点为 $a+b$, $A'B'$ 与 l' 的交点为 $a'+b'$。由 $a'0\infty \downarrow a0'\infty'$ 可见 V,P,Q 三点共线, 由 $aC'\infty' \downarrow a'C\infty$ 可见 P,Q,R 三点共线, 由 $AB\infty \downarrow A'B'\infty'$ 可见 Q,R,S 三点共线, 故 V,Q,S 三点共线, 再由 $B(a+b)\infty \uparrow B'(a'+b')\infty'$ 可见 $a+b$, $a'+b'$, O 三点共线, 即 $\phi(a+b) = a'+b' = \phi(a)+\phi(b)$。

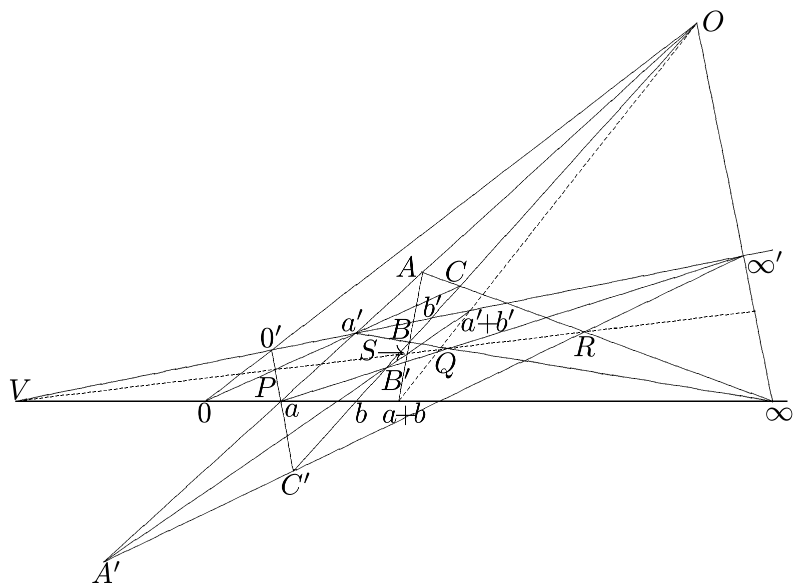

图 3.9

ii) (见图 3.10) 记 $1a'$ 与 Ob 的交点为 C, ∞C 与 Oa 的交点为 A, $0a'$ 与 Ob 的交点为 B, $1'a$ 与 Ob 的交点为 C', $\infty'C'$ 与 Oa 的交点为 A', $0'a$ 与 Ob 的交点为 B', $0a'$ 与 $0'a$ 的交点为 P, $a'1$ 与 $a1'$ 的交点为 Q, $A\infty$ 与 $A'\infty'$ 的交点为 R, AB 与 $A'B'$ 的交点为 S, $0A$ 与 $0'A'$ 的交点为 T, 则 AB 与 l 的交点为 ab, $A'B'$ 与 l' 的交点为 $a'b'$。由 $a'01 \downarrow a0'1'$ 可见 V,P,Q 三点共线, 由 $1C\infty \downarrow 1'C'\infty'$ 可见 V,Q,R 三点共线, 由 $0A\infty \downarrow 0'A'\infty'$ 可见 V,T,R 三点共线, 由 $0AB \downarrow 0'A'B'$ 可见 T,P,S 三点共线,

故 V, R, S 三点共线, 再由 $A(ab)\infty \uparrow A'(a'b')\infty'$ 可见 ab, $a'b'$, O 三点共线, 即 $\phi(ab) = a'b' = \phi(a)\phi(b)$。证毕。

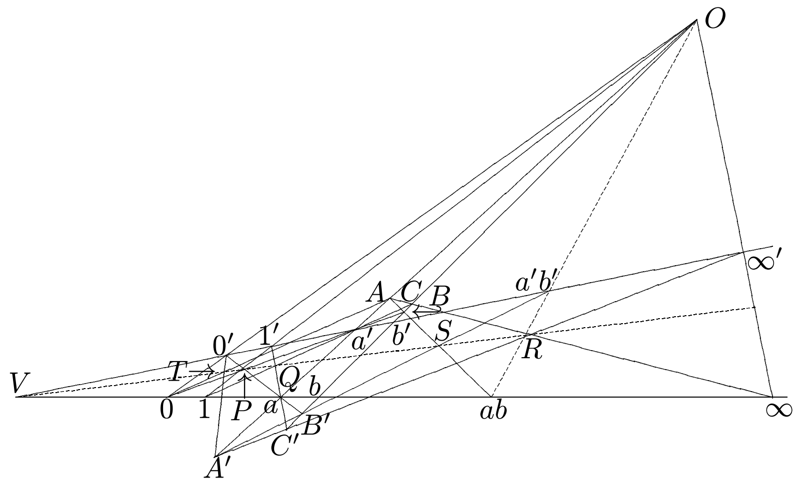

图 3.10

推论 1. 设 ϕ 满足 $\phi(\infty) = \infty'$, $\phi(0) = 0'$, $\phi(1) = 1'$。若 O' 为 $O\infty$ 上的异于 ∞, ∞' 的点, ϕ' 为以 O' 为中心从 l 到 l' 的投影, 则存在 $a, b \in K'$ 使得对任意 $x \in K$ 有 $\phi'(x) = a\phi(x) + b$。

证. 记 $x' = \phi(x)$。

情形 1: $\infty = \infty'$ (见图 3.11)。由定义可见 $\phi'(x) = \phi(x) + b$, 其中 $b = \phi'(0)$。

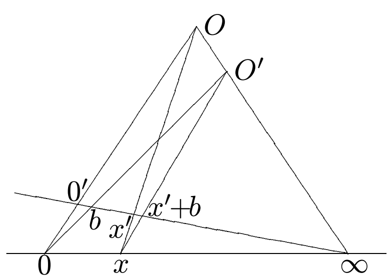

图 3.11

情形 2: $0=0'$ (见图 3.12)。由定义可见 $\phi'(x)=a\phi(x)$, 其中 $a=\phi'(1)$。

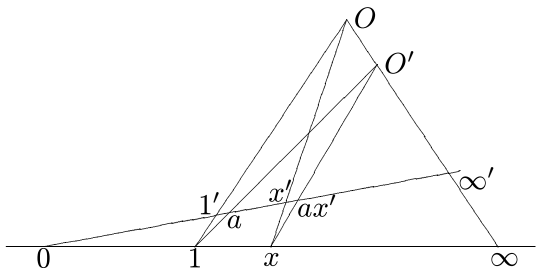

图 3.12

情形 3: 一般情形 (见图 3.13)。令 $l_0=0\infty'$, ϕ_1 为以 O 为中心从 l_0 到 l' 的投影, ϕ_2 为以 O 为中心从 l 到 l_0 的投影, 则 $\phi=\phi_1\circ\phi_2$。在 l_0 上取 ∞' 为无穷远点, 0 为原点, $\phi_2(1)$ 为单位元, 且令 K_0 为 $l_0-\{\infty'\}$ 的体结构, 则 ϕ_1 诱导体同构 $K_0\to K'$ 而 ϕ_2 诱导体同构 $K\to K_0$。令 ϕ_1' 为以 O' 为中心从 l_0 到 l' 的投影, ϕ_2' 为以 O' 为中心从 l 到 l_0 的投影, 则 $\phi'=\phi_1'\circ\phi_2'$。由情形 2 可知存在 $a_0\in K_0$ 使得 $\phi_2'(x)=a_0\phi_2(x)$ 对一切 $x\in K$ 成立, 由情形 1 可知存在 $b\in K'$ 使得 $\phi_1'(y)=\phi_1(y)+b$ 对一切 $y\in K_0$ 成立, 故有

$$\begin{aligned}\phi'(x)&=\phi_1'(\phi_2'(x))=\phi_1'(a_0\phi_2(x))=\phi_1(a_0\phi_2(x))+b\\&=a\phi_1(\phi_2(x))+b=a\phi(x)+b\end{aligned}$$

其中 $a=\phi_1(a_0)$。证毕。

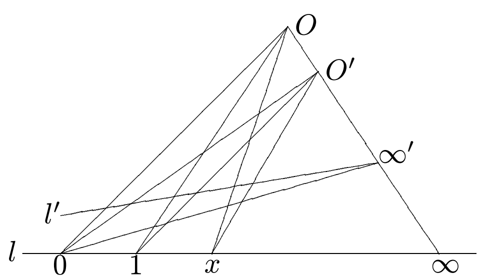

图 3.13

定理 1. 设 Π 为满足公理 i-iv) 及德萨格定理的射影平面, 则存在 (在同构之下唯一的) 体 K 及一一映射 $\Phi:\Pi\to P_K^2$, 使得 Φ 和 Φ^{-1} 都将直线映成直线 (换言之, Φ 是公理式射影几何中的同构)。

证. 在 Π 中任取两条直线 l_X, l_Y (作为"X-轴"和 "Y-轴", 见图 3.14) 以及不在 l_X, l_Y 上的一点 O, 令 ϕ 为以 O 为中心从 l_X 到 l_Y 的投影, 在 l_X 上取原点 0 为 l_X 和 l_Y 的交点, 另外取定无穷远点 ∞_X 和单位元 1_X, 记 K 为 $l_X-\{\infty_X\}$ 的体结构。在 l_Y 上也取 0 为原点, 而取 $\infty_Y=\phi(\infty_X)$ 和 $1_Y=\phi(1_X)$ 分别为无穷远点和单位元, 这样得到 $l_Y-\{\infty_Y\}$ 的体结构 K_Y, 由引理 2 通过 ϕ 可以将 K_Y 与 K 等同起来。令 $\Pi_0=\Pi-O\infty_X$, 令 $p_X, p_Y:\Pi_0\to K$ 分别为以 ∞_Y 为中心到 l_X 的投影和以 ∞_X 为中心到 l_Y 的投影 (即对任一点 $P\in\Pi_0$, $p_X(P)$ 为 $\infty_Y P$ 和 l_X 的交点坐标而 $p_Y(P)$ 为 $\infty_X P$ 和 l_Y 的交点坐标, 见图 3.14), 这样 $P\mapsto(p_X(P),p_Y(P))$ 就给出一个一一映射 $\Phi_0:\Pi_0\to K^2$。

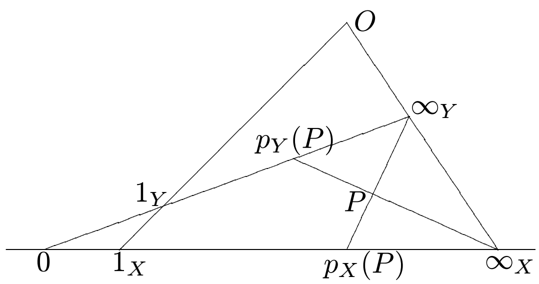

图 3.14

我们来验证 Φ_0 将直线映成直线。设 l 为 Π 中异于 $O\infty_X$ 的直线。若 l 过 O, 记 c 为 l 与 l_X 的交点的坐标, 则由定义易见对任意 $P\in l-\{O\}$ 有 $p_X(P)+p_Y(P)=c$, 故 $\Phi_0(l-\{O\})$ 为直线 $x+y=c$。若 l 不过 O, 令 ϕ_l 为以 O 为中心从 l_X 到 l 的投影, 在 l 上取无穷远点, 原点, 单位元分别为 $\infty_l=\phi_l(\infty_X)$, $0_l=\phi_l(0)$ 和 $1_l=\phi_l(1_X)$, 这样得到的 $l-\{\infty_l\}$ 的体结构, 由引理 2 通过 ϕ_l 与 K 等同起来。由推论 1, 存在 $a_X, b_X, a_Y, b_Y\in K$ 使得对任意点 $P\in l$, 若 P 在 l 上的坐标为 t, 则 $p_X(P)=a_Xt+b_X$, $p_Y(P)=a_Yt+b_Y$ (若 $\infty_l=\infty_X$ 则 $a_Y=0$, 若 $\infty_l=\infty_Y$ 则

$a_X = 0$, 但 a_X 和 a_Y 不会同时为 0), 由此即可见 $\Phi_0(l - \{\infty_l\})$ 为直线 (其参数方程为 $x = a_X t + b_X$, $y = a_Y t + b_Y$)。

在 P_K^2 中任取一直线 l_∞ 作为无穷远线, 将 K^2 与 $P_K^2 - l_\infty$ 等同起来, 一个点 $(x, y) \in K^2$ 的射影坐标为 $(x : y : 1)$, 而 l_∞ 中的点的坐标形如 $(x : y : 0)$。由推论 1 中情形 1 的证明可见, 若两条直线 $l, l' \subset \Pi$ 有相同的无穷远点 ∞_l, 则 $\Phi_0(l - \{\infty_l\})$ 和 $\Phi_0(l' - \{\infty_l\})$ 具有相同的斜率。由此我们可以将 Φ_0 扩张成一个映射 $\Phi : \Pi \to P_K^2$ 如下: Φ 在 Φ_0 上的限制等于 Φ_0, 而对任一点 $P \in O\infty_X$, 任取一条过 P 的异于 $O\infty_X$ 的直线 l, 若 $\Phi_0(l - \{P\})$ 的参数方程为 $x = a_X t + b_X$, $y = a_Y t + b_Y$, 则令 $\Phi(P) = (a_X : a_Y : 0)$。显然 Φ 是一一对应, 且将直线映成直线。由此及射影公理不难得出 Φ^{-1} 也将直线映成直线。

最后, 由引理 2 可知 K 在同构之下是唯一的。 证毕。

由定理 1 及命题 2.1 立得

推论 2. 设 Ω 为满足公理 i-viii) 的三维射影空间, 则存在 (在同构之下唯一的) 体 K 及一一映射 $\Phi : \Omega \to P_K^3$, 使得 Φ 和 Φ^{-1} 都将直线映成直线, 平面映成平面 (换言之, Φ 是公理式射影几何中的同构)。

注 1. 由定理 1 和推论 2 即可得到仿射几何的相应结果: 任一满足欧几里德结合公理与平行公理 (过任一直线外的任一点存在该直线的唯一平行线) 且满足德萨格定理 (包括退化情形) 的仿射平面一定同构于一个 (在同构之下唯一的) 体 K 上的仿射平面 K^2; 任一满足欧几里德结合公理与平行公理的三维仿射空间一定同构于一个 (在同构之下唯一的) 体 K 上的三维仿射空间 K^3。

注 2. 推论 2 当然可以推广到一般的高维 (维数 > 2) 的射影几何。

4. 射影直射变换

设 K 是一个体, 则射影群 $PGL_3(K)$ 作用于 $\Pi = P_K^2$ 上, 任一元 $g \in PGL_3(K)$ 给出 Π 到自身的一一映射, 将直线映成

直线。另一方面, 若 σ 是 K 的一个自同构, 则可以定义一个 Π 到自身的一一映射 ϕ_σ, 将点 $(X:Y:Z)$ 映到 $(\sigma(X):\sigma(Y):\sigma(Z))$, 显然 ϕ_σ 也将直线映成直线。对任意 $g\in PGL_3(K)$ 和 $\sigma\in \mathrm{Aut}(K)$, 称 $g\circ\phi_\sigma$ 为 Π 上的一个射影直射变换, 显然所有射影直射变换组成一个群, 记为 $P\Gamma L_3(K)$, 它有一个正规子群 $PGL_3(K)$, 而所有 ϕ_σ 组成一个同构于 $\mathrm{Aut}(K)$ 的子群, 故 $P\Gamma L_3(K)\cong PGL_3(K)\rtimes \mathrm{Aut}(K)$。

命题 1. 设 ϕ 为 Π 到自身的一一映射, 将直线映成直线, 则 ϕ 是射影直射变换 (换言之, $P\Gamma L_3(K)$ 同构于公理式射影几何中射影平面的自同构群)。

证. 对 Π 中的任意两条直线 l, l', 设其交点为 V, 任取 l 上异于 V 的两个点 A, B 及 l' 上的两个点 C, D, 则存在一个元 $g\in PGL_3(K)$ 使得 $g(0:0:1)=V$, $g(1:0:1)=A$, $g(1:0:0)=B$, $g(0:1:1)=C$, $g(0:1:0)=D$, 故可取 $g\in PGL_3(K)$ 使得 $\phi'=g\circ\phi$ 保持五个点 $0=(0:0:1)$, $1_X=(1:0:1)$, $\infty_X=(1:0:0)$, $1_Y=(0:1:1)$ 和 $\infty_Y=(0:1:0)$ 不变, 这样 ϕ' 也保持 1_X1_Y 与 $\infty_X\infty_Y$ 的交点 $O=(1:-1:0)$ 不变。由于 ϕ' 也将直线映成直线, 为简单起见不妨用 ϕ' 代替 ϕ, 即假定 ϕ 保持五个点 0, 1_X, ∞_X, 1_Y 和 ∞_Y 不变。

令 $l_X=01_X$, $l_Y=01_Y$。由于 ϕ 保持 0, 1_X 和 1_Y 且将直线映成直线, 由射影公理得 $\phi(l_X)=l_X$, $\phi(l_Y)=l_Y$。这样 ϕ 诱导 $l_X-\{\infty_X\}$ 到自身的一一映射, 从而给出 K 到自身的一个一一映射 σ。由于 K 的加法和乘法可以由直线的相交结构给出 (见图 1.1 和图 1.2), 可见 σ 是体 K 的同构。我们来验证 $\phi=\phi_\sigma$。令 $\phi'=\phi_\sigma^{-1}\circ\phi$, 则 ϕ' 保持 l_X 上各点不变也保持 O 不变, 并且 $\phi'(l_Y)=l_Y$。对任意一点 $P\in l_Y$, ϕ' 保持 OP 与 l_X 的交点和 O 不变, 故 $\phi'(OP)=OP$, 从而 ϕ' 保持 OP 与 l_Y 的交点 P 不变。对 Π 中任一异于 ∞_X, ∞_Y 的点 Q, ϕ' 保持 ∞_YQ 与 l_X 的交点和 ∞_XQ 与 l_Y 的交点不变, 故 $\phi'(\infty_YQ)=\infty_YQ$, $\phi'(\infty_XQ)=\infty_XQ$, 从而 ϕ' 保持 ∞_YQ 与 ∞_XQ 的交点 Q 不变。这说明 $\phi'=\mathrm{id}_\Pi$。证毕。

注 1. 命题 1 当然也可以推广到一般的高维 (维数 >2) 的射影几何。在经典的文献中, 命题 1 被称为“射影几何的基本定理”。

此外, 由于实数域 $\mathbb{R}$ 没有非平凡的自同构, $\mathbb{R}$ 上的射影直射变换就是射影变换, 故由命题 1 可知, 一个 $P^2_{\mathbb{R}}$ 到自身的一一映射若将直线映成直线, 则必为射影变换。

注 2. 经典射影几何的另一工具是"调和分割"。设 A, B, C 是直线 l 上的三个点, 在 l 上以 A, B, C 分别作为 $0, \infty, 1$ 建立坐标系, 则坐标为 -1 的点 $D \in l$ 称为 A, B, C 的*第四调和点*, 而 $\{A, B, C, D\}$ 称为一个*调和拼四组*。由图 1.1 可知 A, B, C 的第四调和点 D 可由图 4.1 那样给出。在 $\mathrm{ch}(K) \neq 2$ 时, 调和分割是个有力工具, 如前面的引理 2 就可以用调和分割的方法证明。但当 K 的特征为 2 时 $D = C$ (因为 $-1 = 1$), 此时我们没有调和分割这一工具。

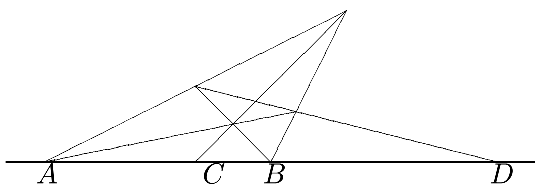

图 4.1

一个经典的结果是

命题 2. 设 K 是特征非 2 的域, ϕ 为 P^1_K 到自身的一一映射, 将调和拼四组映成调和拼四组, 则 ϕ 是射影直射变换。

证明不难, 这里从略 (这个命题不能推广到 K 是一般体的情形)。