

习题解答

第七章 线性变换

习题 7-1

1. 设 V 为 n 维线性空间, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 为 V 的一个基.

$$\alpha_1 = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n, \alpha_2 = \eta_2 + \dots + \eta_n, \dots, \alpha_n = \eta_n$$

(1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的一个基;

(2) 求由基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的过渡矩阵;

(3) 设 α 在基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 下的坐标为 (a_1, a_2, \dots, a_n) , 求 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标.

解: (1), (2) 因为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

设

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

则 T 可逆, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的基, 且由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的过渡矩阵为 T .

(3) 设

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

则

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

所以 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1})$.

2. 在 K^4 中, 求由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵, 并求向量 ξ 在所给基下的坐标.

(1) $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1);$

$\eta_1 = (2, 1, -1, 1), \eta_2 = (0, -1, 1, 0), \eta_3 = (-1, -1, 2, 1), \eta_4 = (2, 1, 1, 3);$

$\xi = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标;

(2) $\varepsilon_1 = (1, 2, -1, 0), \varepsilon_2 = (1, -1, 1, 1), \varepsilon_3 = (-1, 2, 1, 1), \varepsilon_4 = (-1, -1, 0, 1);$

$\eta_1 = (2, 1, 0, 1), \eta_2 = (0, 1, 2, 2), \eta_3 = (-3, -1, -1, 1), \eta_4 = (1, 3, 1, 2);$

$\xi = (1, 0, 0, 0)$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标;

(3) $\varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1), \varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1), \varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1), \varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1);$

$\eta_1 = (1, 1, 0, 1), \eta_2 = (2, 1, 2, 1), \eta_3 = (1, 1, 1, 0), \eta_4 = (0, 1, -1, -1);$

$\xi = (1, 0, 0, -1)$ 在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标.

解: (1) $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 \\ -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

(2) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$ ξ 在所给基下的坐标为 $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$

(3) $T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$ ξ 在所给基下的坐标为 $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$

3. 继上题 (2), 求一向量, 它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标是在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标的 2 倍.

解: $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 = (0, 4, 2, 6).$

4. 设 $K[x]_n$ 表示由 $K[x]$ 中次数小于 n 的多项式组成的线性空间.

$$f_i(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdots (x - a_n), \quad i = 1, \cdots, n,$$

其中 $a_i \in K$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 为互不相同的数.

(1) 证明: $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 组成 $K[x]_n$ 的一个基;

(2) 取 a_1, a_2, \cdots, a_n 为全体 n 次单位根, 求由基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 到基 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 的过渡矩阵.

解: (1) 只要证 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 线性无关即可. 设

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0,$$

分别以 $x = a_i$ 代入上式, 得

$$k_i f_i(a_i) = 0.$$

因为 $f_i(a_i) \neq 0$, 所以 $k_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 故 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 线性无关. 又因 $\dim K[x]_n = n$, 可知 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 为 $K[x]_n$ 的基.

(2) 设全部 n 次单位根是 $1, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$. 则

$$f_i(x) = \frac{x^n - 1}{x - \varepsilon_i} = \frac{x^n - \varepsilon_i^n}{x - \varepsilon_i} = x^{n-1} + \varepsilon_i x^{n-2} + \varepsilon_i^2 x^{n-3} + \cdots + \varepsilon_i^{n-1},$$

故所求过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_1^{n-2} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

5. 在 $K[x]$ 中, 记

$$\langle x \rangle^0 = 1, \langle x \rangle = x, \langle x \rangle^k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1), \quad k > 1$$

(1) 求 $K[x]_5$ 中由基 $1, \langle x \rangle, \langle x \rangle^2, \langle x \rangle^3, \langle x \rangle^4$ 到基 $1, x, x^2, x^3, x^4$ 的过渡矩阵;

(2) 求 $K[x]_5$ 中多项式 $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ 在基 $1, \langle x \rangle, \langle x \rangle^2, \langle x \rangle^3, \langle x \rangle^4$ 下的坐标;

* (3) 证明: $\sum_{x=0}^n \langle x \rangle^k = \frac{1}{k+1} \langle n+1 \rangle^{k+1}$;

* (4) 由此导出数列 $D_n = \sum_{k=0}^n k^4$ 的通项公式.

解: (1) $1 = 1$

$$x = \langle x \rangle$$

$$x^2 = 0 + x + x(x-1) = 0 + \langle x \rangle + \langle x \rangle^2$$

$$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = \langle x \rangle + 3\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^3$$

$$x^4 = \langle x \rangle + 7\langle x \rangle^2 + 6\langle x \rangle^3 + \langle x \rangle^4$$

故所求过渡矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $(1, 4, 11, 7, 1)$.

(3) 易知 $\langle x+1 \rangle^{k+1} - \langle x \rangle^{k+1} = (k+1)\langle x \rangle^k$. 所以

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^n \langle x \rangle^k &= \frac{1}{k+1} \sum_{x=0}^n [\langle x+1 \rangle^{k+1} - \langle x \rangle^{k+1}] \\ &= \frac{1}{k+1} \left[\sum_{x=1}^{n+1} \langle x \rangle^{k+1} - \sum_{x=0}^n \langle x \rangle^{k+1} \right] \\ &= \frac{1}{k+1} (\langle n+1 \rangle^{k+1} - \langle 0 \rangle^{k+1}) \\ &= \frac{1}{k+1} \langle n+1 \rangle^{k+1}. \end{aligned}$$

(4) 因为 $x^4 = \langle x \rangle + 7\langle x \rangle^2 + 6\langle x \rangle^3 + \langle x \rangle^4$, 所以

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{x=0}^n x^4 = \sum_{x=0}^n (\langle x \rangle + 7\langle x \rangle^2 + 6\langle x \rangle^3 + \langle x \rangle^4) \\ &= \frac{1}{2} \langle n+1 \rangle^2 + \frac{7}{3} \langle n+1 \rangle^3 + \frac{6}{4} \langle n+1 \rangle^4 + \frac{1}{5} \langle n+1 \rangle^5 \\ &= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1). \end{aligned}$$

习题 7-2

1. 给定 K^3 的两个基:

$$\varepsilon_1 = (1, 1, -1), \quad \eta_1 = (1, -1, 2),$$

$$\varepsilon_2 = (1, 0, -1), \quad \eta_2 = (2, -1, 2),$$

$$\varepsilon_3 = (1, 1, 1), \quad \eta_3 = (-2, 1, 1).$$

设 \mathcal{A} 为 K^3 的线性变换, 使:

$$\mathcal{A}\varepsilon_i = \eta_i \quad i = 1, 2, 3.$$

(1) 求由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵;

(2) 求 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵;

(3) 求 \mathcal{A} 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵;

(4) 设 $\alpha = (2, -1, 3)$, 分别求 $\mathcal{A}\alpha$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 与基 η_1, η_2, η_3 下的坐标.

解: 设 K^3 标准基为 $\xi_1 = (1, 0, 0)$, $\xi_2 = (0, 1, 0)$, $\xi_3 = (0, 0, 1)$, 令

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

则有

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)B, \quad (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)C.$$

(1) 由于 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)C = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)B^{-1}C$, 故由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵为

$$T = B^{-1}C = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 3 & -3 \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) 由于 $(\mathcal{A}(\varepsilon_1), \mathcal{A}(\varepsilon_2), \mathcal{A}(\varepsilon_3)) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)B^{-1}C$, 故 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A = B^{-1}C = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 3 & -3 \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(3) 设 \mathcal{A} 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵为 A' , 则

$$A' = T^{-1}AT = (B^{-1}C)^{-1}(B^{-1}C)(B^{-1}C) = B^{-1}C = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 3 & -3 \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(4) α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 与基 η_1, η_2, η_3 下的坐标分别为

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad C^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

因此 $\mathcal{A}\alpha$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标为

$$AB^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix},$$

\mathcal{A} 在基 η_1, η_2, η_3 下的坐标为

$$A'B^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. 设 $A \sim C, B \sim D$, 证明:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

证明: 存在可逆矩阵 T_1, T_2 , 使得

$$T_1^{-1}AT_1 = C, \quad T_2^{-1}BT_2 = D,$$

因此 $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$$T^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} T_1^{-1}AT_1 & 0 \\ 0 & T_2^{-1}BT_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

3. 设 A 可逆, 证明: AB 与 BA 相似.

证明: 由于 $A^{-1}(AB)A = BA$, 故 $AB \sim BA$.

4. 设 A 可逆, 且 $A \sim B$, 证明: B 也可逆, 且 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

证明: 由于 T, A 皆可逆, 所以 B 可逆, 且

$$B^{-1} = (T^{-1}AT)^{-1} = TAT^{-1},$$

故 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

5. 设 $A \sim B$, 证明: $A^T \sim B^T$.

证明: 存在可逆矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT = B$. 故 $B^T = (T^{-1}AT)^T = T^T A^T T^{-T}$.

6. 设 $A \sim B$, $f(x) \in K[x]$, 证明: $f(A) \sim f(B)$.

证明: 存在可逆矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT = B$. 故

$$T^{-1}(f(A))T = f(T^{-1}AT) = f(B).$$

7. 证明:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

其中 (i_1, i_2, \dots, i_n) 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的一个排列.

证明: 设 V 是 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的基. \mathcal{A} 为 V 的线性变换, 定义为

$$\mathcal{A}\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i,$$

则 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

由于 (i_1, i_2, \dots, i_n) 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的一个排列, 因此 $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_n}$ 仍为 V 的基, 而

$$\mathcal{A}\varepsilon_{i_j} = \lambda_{i_j} \varepsilon_{i_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

故 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_n}$ 下的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix},$$

从而 $A \sim B$.

8. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 证明: 如果存在可逆矩阵 $U \in M_n(\mathbb{C})$, 使 $A = U^{-1}BU$, 则必存在可逆矩阵 $T \in M_n(\mathbb{R})$, 使 $A = T^{-1}BT$.

注: 本题是下述结论的特例:

设 K, F 是两个数域, 其中 F 是 K 的扩域 (即 $K \subseteq F$), A, B 是数域 K 上的两个矩阵. 如果 A, B 在 F 上相似, 则它们必在 K 上相似.

证明: 设 $U = T_1 + iT_2$, $T_1, T_2 \in M_n(\mathbb{R})$. 则 $(T_1 + iT_2)A = B(T_1 + iT_2)$. 又因 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 可推出

$$T_1A = BT_1, \quad T_2A = BT_2.$$

考察 $f(\lambda) = |T_1 + \lambda T_2|$. 由于 $f(i) = |U| \neq 0$, 说明 $f(\lambda)$ 不是零多项式, 必有 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 使 $f(\lambda_0) \neq 0$. 从而 $T = T_1 + \lambda_0 T_2$ 可逆. 由 $T_1 A = B T_1, T_2 A = B T_2$ 可得 $T A = B T$. 故 $A = T^{-1} B T$.

9. 设 $x, y, z \in K$, 令

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} z & x & y \\ x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

证明: A, B, C 彼此相似.

证明: 取置换矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 P, Q 皆可逆, 且

$$P^{-1} A P = C, \quad Q^{-1} A Q = B,$$

所以 $A \sim B, A \sim C$. 由相似关系的传递性, 可得 $B \sim C$.

*10. 证明:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_n \sim \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

证明: 设 V 是 n 维线性空间, $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的基. \mathcal{A} 为 V 的线性变换, 定义为

$$\mathcal{A}\varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_n.$$

又易知

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n, \quad \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \cdots, \alpha_n = \varepsilon_1 - \varepsilon_n$$

仍为 V 的基, 且 \mathcal{A} 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

从而 $A \sim B$.

习题 7-3

1. 求复数域上线性空间 V 的线性变换 \mathcal{A} 的特征值与特征向量, 设 \mathcal{A} 在 V 的一个基下的矩阵是:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0);$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(5) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (6) A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(7) A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

解: 数字表示特征值, 紧接在后的向量就是相应的一个特征向量.

(1) 7, (1, 1); -2, (5, -4).

(2) ai , (1, i); $-ai$, (i , 1).

(3) 2, $k(1, 1, 0, 0) + l(1, 0, 1, 0) + m(1, 0, 0, 1)$; -2, (-1, 1, 1, 1).

(4) 2, (-2, 1, 0); $1 + \sqrt{3}$, (-3, 1, -2 + $\sqrt{3}$); $1 - \sqrt{3}$, (-3, 1, -2 - $\sqrt{3}$).

(5) 1, $k(1, 0, 1) + l(0, 1, 0)$; -1, (-1, 0, 1).

(6) -3, (1, 1, 1); 2, (1, 1, -4).

(7) 2, (0, 0, 1); 1, (-1, 1, 8).

2. 设 λ_1, λ_2 是线性变换 \mathcal{A} 的两个不同的特征值, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 分别是 \mathcal{A} 的属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量.

证明: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 不是 \mathcal{A} 的特征向量.

证明: (反证) 如果 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 是 \mathcal{A} 的属于某个特征值 λ_0 的特征向量, 则

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \lambda_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

又 $\mathcal{A}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \mathcal{A}\varepsilon_1 + \mathcal{A}\varepsilon_2 = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2$, 所以

$$(\lambda_1 - \lambda_0)\varepsilon_1 + (\lambda_2 - \lambda_0)\varepsilon_2 = 0.$$

由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 可得 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 线性无关, 因此

$$\lambda_1 - \lambda_0 = 0, \quad \lambda_2 - \lambda_0 = 0,$$

得到 $\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda_2$, 矛盾.

3. 证明: 如果线性变换 \mathcal{A} 以每个非零向量作为它的特征向量, 则 \mathcal{A} 为标量乘积变换.

证明: 设对某个非零向量 α 有 $\mathcal{A}\alpha = k\alpha$, 对另一个非零向量 β , 有 $\mathcal{A}\beta = m\beta$. 如果 $k \neq m$, 则根据习题 2 的结论, $\alpha + \beta$ 不是 \mathcal{A} 的特征向量. 如果 $\alpha + \beta = 0$, 则有 $\mathcal{A}\beta = -\mathcal{A}\alpha = -k\alpha = k\beta$, 与 $k \neq m$ 矛盾. 因此 $\alpha + \beta$ 是非零向量, 与题设矛盾.

4. 证明: AB 与 BA 有相同的特征值.

证明: 根据习题 4-8 的第 4 题, 当 $|A| \neq 0, AC = CA$ 时, 有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

因此

$$\begin{vmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |\lambda E - AB|.$$

又因

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A \\ B & \lambda E \end{pmatrix},$$

两边取行列式, 即得

$$\begin{vmatrix} E & A \\ B & \lambda E \end{vmatrix} = |\lambda E - BA| = \begin{vmatrix} \lambda E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |\lambda E - AB|.$$

因此 AB 与 BA 有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值.

5. 证明: 欧几里得空间的正交变换的特征值(如有的话)只能是 ± 1 .

证明: 设 α 是属于正交变换 \mathcal{A} 的特征值 λ_0 的特征向量, 则

$$0 \neq (\alpha, \alpha) = (\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\alpha) = \lambda_0^2(\alpha, \alpha),$$

因此 $\lambda_0^2 = 1, \lambda_0 = \pm 1$.

6. 证明: 幂零矩阵的特征值全为零.

证明: 设 α 是属于幂零矩阵 A 的特征值 λ_0 的特征向量, 则 $A\alpha = \lambda_0\alpha$. 由于

$$0 = A^k\alpha = \lambda_0^k\alpha,$$

可得 $\lambda_0^k = 0, \lambda_0 = 0$.

7. 设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ (a_i 不全为零), 求矩阵 $A^T A$ 的特征值与特征向量.

解: 设 $a_i \neq 0$. 特征值 0 对应的特征向量是 $\alpha_j = (0, \dots, 0, a_i, \dots, -a_j, 0, \dots, 0)$

($j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$)的线性组合. 特征值 $\sum_{j=1}^n a_j^2$ 的特征向量是 (a_1, \dots, a_n) .

*8. 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, 子式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}, \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n),$$

称为 A 的一个 k 阶主子式. 令特征多项式

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} \lambda + (-1)^n a_n.$$

证明: a_k 等于 A 的全部 k 阶主子式之和.

证明: 把 $|\lambda E - A|$ 的每列

$$\begin{pmatrix} -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ \vdots \\ \lambda - a_{jj} \\ \vdots \\ -a_{nj} \end{pmatrix}$$

都拆成两列:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad \begin{pmatrix} -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ \vdots \\ -a_{jj} \\ \vdots \\ -a_{nj} \end{pmatrix}$$

则行列式 $|\lambda E - A|$ 可分解为 2^n 个 n 阶行列式之和, 其中每个行列式的列都是上述两种形式之一.

设 A_k 为任一含有 k 个 λ 的子行列式, 其 λ 处于 j_1, \dots, j_k 列, 将 A_k 按这 k 列展开, 得

$$A_k = \lambda^k \cdot (-1)^{n-k} D_{n-k},$$

其中 D_{n-k} 为在 A 中划去第 j_1, \dots, j_k 列、第 j_1, \dots, j_k 行而得到的 $n-k$ 阶主子式. 当这 k 个 λ 取遍 n 阶行列式中所有可能的 k 个位置, 则 D_{n-k} 就取遍所有 C_n^k 个主子式. 从而 $\chi_A(\lambda)$ 中 λ^{n-k} 的系数等于

$(-1)^k$ 乘以 A 的所有 k 阶主子式之和. 因此 a_k 为 A 的所有 k 阶主子式之和.

9. 设 $A \in M_n(K)$. 证明: 存在 K 上的一个次数不超过 n^2 的多项式 $f(x)$, 使 $f(A) = 0$.

证明: 因为 $M_n(K)$ 是 K 上 n^2 维线性空间, 故 $E, A, A^2, \dots, A^{n^2-1}, A^{n^2}$ 线性相关. 于是存在不全为零的 $a_i \in K, i = 1, \dots, n^2$ 使得

$$a_0 E + a_1 A + \dots + a_{n^2-1} A^{n^2-1} + a_{n^2} A^{n^2} = 0.$$

令

$$f(x) = a_{n^2} x^{n^2} + a_{n^2-1} x^{n^2-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

则 $f(A) = 0$.

***10.** 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明: 存在可逆矩阵 $T \in GL(n, \mathbb{C})$, 使 $T^{-1}AT$ 为上三角矩阵.

证明: 对 n 用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时结论自然成立. 现设结论对 $n - 1$ 阶矩阵成立.

设 λ_1 是 A 的一个特征值, 相应的特征向量是 $\alpha_1 \in \mathbb{C}^n$. 把 α_1 扩充成 \mathbb{C}^n 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 令 $T_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 T_1 可逆, 且

$$AT_1 = T_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad T_1^{-1}AT_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

其中 $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$. 由归纳假设, 存在可逆矩阵 $T_2 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$, 使得

$$T_2^{-1}A_1T_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

令 $T = T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, 则 T 可逆, 且

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

11. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $f(x)$ 为一复系数多项式. 证明: 如果 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$.

证明: 由习题 10, 存在可逆矩阵 T , 使

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

这里 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 从而

$$T^{-1}f(A)T = f(T^{-1}AT) = f \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & * \\ & f(\lambda_2) & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

所以 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 为 $f(A)$ 的全部特征值.

习题 7-4

1. 习题 7-3 第一题中的矩阵, 哪些是可以对角化的? 在可对角化的情况下, 求出相应的过渡矩阵和对角矩阵.

解: (1) $T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \text{diag}(7, -2)$.

(2) $T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \text{diag}(ai, -ai)$.

(3) $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \text{diag}(-2, 2, 2, 2)$.

(4) $T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 + \sqrt{3} & -2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \text{diag}(2, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$.

(5) $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T^{-1}AT = \text{diag}(-1, 1, 1)$.

(6), (7) 不可对角化.

2. 在 $K[x]_n$ 中, 求微分变换 \mathcal{D} :

$$\mathcal{D}(f(x)) = f'(x)$$

的特征多项式, 并证明: \mathcal{D} 在任何一个基下的矩阵都不可能是对角矩阵.

解: 取 $K[x]_n$ 的基 $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$. 则 \mathcal{D} 在这个基下的矩阵是

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

从而 \mathcal{D} 的特征多项式为 $\chi_D(\lambda) = \lambda^n$. 如果 \mathcal{D} 可对角化, 则存在可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT = 0$, 即 $D = 0$, 而 \mathcal{D} 不是零变换, 矛盾.

*3. 设 $A \in M_n(K)$, 证明: 如果 $\text{rank } A + \text{rank}(A - E) = n$, 则 A 可对角化.

证明: 由习题 4-8.13 知, $\text{rank } A + \text{rank}(A - E) = n$ 的充分必要条件是 $A^2 = A$. 即对 A 的任一向量 α 有 $A\alpha = \alpha$. 又 $A(A - E) = 0$, 故对 $A - E$ 的任一向量 β 有 $A\beta = 0$.

设 A 的列向量组的极大无关组为 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $A - E$ 的极大无关列向量组为 $\beta_1, \dots, \beta_{n-r}$ (因为 $\text{rank } A + \text{rank}(A - E) = n$). 下证 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{n-r}$ 线性无关.

设有

$$\sum_{i=1}^r k_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n-r} m_j \beta_j = 0.$$

则

$$\sum_{i=1}^r k_i A\alpha_i + \sum_{j=1}^{n-r} m_j A\beta_j = \sum_{i=1}^r k_i A\alpha_i = \sum_{i=1}^r k_i \alpha_i = 0.$$

于是 $k_1 = \dots = k_r = 0$, 进而 $m_1 = \dots = m_{n-r} = 0$. 所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{n-r}$ 线性无关.

令 $T = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{n-r})$, 则 T 可逆, 且

$$AT = A(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{n-r}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{n-r}) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$AT = T \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*4. 设 $A \in M_n(K)$, 证明: 如果 $\text{rank}(A + E) + \text{rank}(A - E) = n$, 则 A 可对角化.

证明: 与上题类似, 略.

5. 设 \mathcal{A} 为数域 K 上 n 维线性空间 V 的线性变换, 满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. 求 \mathcal{A} 的特征值, 并证明 \mathcal{A} 可对角化.

证明: 设

$$V_1 = \{\mathcal{A}\alpha \mid \alpha \in V\}, \quad V_2 = \{\alpha - \mathcal{A}\alpha \mid \alpha \in V\}.$$

则对任意的 $\alpha \in V$, 有 $\alpha = \mathcal{A}\alpha + (\alpha - \mathcal{A}\alpha)$, 因此

$$V = V_1 + V_2.$$

若 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则

$$\alpha = \mathcal{A}\beta = \gamma - \mathcal{A}\gamma, \quad \beta, \gamma \in V.$$

于是

$$\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}^2\beta = \mathcal{A}\beta = \alpha, \quad (*)$$

$$\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}\gamma - \mathcal{A}^2\gamma = \mathcal{A}\gamma - \mathcal{A}\gamma = 0. \quad (**)$$

所以 $\alpha = \mathcal{A}\alpha = 0$, 即 $V_1 \cap V_2 = 0$. 这样就证明了

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

对于 V_1 中的向量 α , 有 (*) 式成立, 说明 V_1 是属于特征值 1 的特征子空间. 类似地由 (**) 式可得 V_2 是属于特征值 0 的特征子空间. 根据推论 4.5, \mathcal{A} 可对角化. \mathcal{A} 的特征值为 0, 1.

(注: 也可利用习题 3 的方法加以证明)

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 先将矩阵 A 对角化, 再求 A^n ;

* (2) 利用上述结果, 求斐波那契数列的通项公式.

解: (1) A 的特征值为 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, 相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{aligned} A^n &= T \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(2) 令

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix},$$

其中 a_i 是第 i 个斐波那契数. 则

$$\alpha_n = A^n \alpha_0.$$

所以

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \alpha_0 = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

算得

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} (\alpha^n - \beta^n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right].$$

7. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶上三角矩阵. 证明:

(1) 若 $a_{ii} \neq a_{jj}$ ($i \neq j$), 则 A 可对角化;

(2) 若 $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$, 且至少有一个 $a_{ij} \neq 0$ ($i \neq j$), 则 A 不可对角化.

证明: (1) 由于 A 是上三角矩阵, 故 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 为 A 的 n 个特征值. 若当 $i \neq j$ 时 $a_{ii} \neq a_{jj}$, 则 A 有 n 个不同的特征值, 从而 A 可对角化.

(2) (反证) 已知 A 的特征值为 $\lambda_0 = a_{11} = \dots = a_{nn}$, 如 A 可对角化, 则存在可逆矩阵 T , 使得

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_0).$$

于是

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

即 A 为纯量阵, 与假设矛盾.

8. 设有分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}.$$

证明: A 可对角化的充分必要条件是每一个 A_i 皆可对角化.

证明: 充分性是显然的. 下证必要性.

设 A 可对角化, 则存在可逆矩阵 T , 使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$AT = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

令

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_s \end{pmatrix},$$

其中 T_i 的行数等于 A_i 的阶数 r_i . 则

$$A_i T_i = T_i \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

这说明 T_i 的非零列向量都是 A_i 的特征向量. 又因 T 可逆, 故 T 的行向量线性无关, 因而 T_i 的行向量也线性无关. 于是 $\text{rank } T_i = A_i$ 的阶数, T_i 的列秩也等于 A_i 的阶数. 因此 A_i 有 r_i 个线性无关的特征向量, 说明 A_i 皆可对角化.

***9.** 设 $A, B \in M_n(K)$, 且 $AB = BA$. 证明: 如果 A, B 都可对角化, 则存在可逆矩阵 $T \in M_n(K)$, 使 $T^{-1}AT$ 与 $T^{-1}BT$ 同为对角矩阵.

证明: 设 A 的不同特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 其中 λ_i 的重数为 r_i . 由于 A 可对角化, 存在可逆矩阵 T , 使

$$T^{-1}AT = A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix}.$$

令 $B_1 = T^{-1}BT$, 则 $A_1 B_1 = B_1 A_1$.

令 $B_1 = (B_{ij})$, 其分块方式与 A_1 相同, 则由 $A_1 B_1 = B_1 A_1$ 得

$$\lambda_i B_{ij} = B_{ij} \lambda_j$$

于是当 $i \neq j$ 时有 $B_{ij} = 0$, 即

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss} \end{pmatrix}.$$

又因 B 可对角化, B_1 也可对角化, 从而由上题知每个 B_{ii} 都可对角化. 即存在可逆矩阵 $S_i \in M_{r_i}(K)$ 使

$$S_i^{-1} B_{ii} S_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_{r_i}} \end{pmatrix}.$$

令

$$T = T_1 \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_s \end{pmatrix},$$

则 T 可逆, 且

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} S_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & S_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix}, \\ T^{-1}BT &= \begin{pmatrix} S_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & S_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_1^{-1}B_{11}S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_s^{-1}B_{ss}S_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{1r_1} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{s1} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_{sr_s} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

同为对角形.

习题 7-5

1. 设 \mathcal{A} 是线性空间 V 的线性变换, 已知 \mathcal{A} 在基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

求 \mathcal{A} 的所有不变子空间.

解: 设 W 是 \mathcal{A} 的一个非零不变子空间. 首先证明: W 必包含某个基向量 η_i .

设

$$0 \neq \alpha = a_k \eta_k + \dots + a_n \eta_n \in W, \quad a_k \neq 0.$$

则 $\mathcal{A}^{k-1} \alpha = a_k \eta_1 \in W, \eta_1 \in W$.

再设 η_k 是包含于 W 中的下标最大的基向量, 则

$$\eta_{k-1} = \mathcal{A} \eta_k, \eta_{k-2} = \mathcal{A}^2 \eta_k, \dots, \eta_1 = \mathcal{A}^{k-1} \eta_k \in W.$$

下面证

$$W = L(\eta_1, \dots, \eta_k).$$

用反证法. 如有 $\alpha \in W$, 但 $\alpha \notin L(\eta_1, \dots, \eta_k)$, 则

$$\alpha = a_1 \eta_1 + \dots + a_m \eta_m, \quad \text{其中 } a_m \neq 0, m > k.$$

于是

$$a_{m-k} \eta_1 + \dots + a_{m-1} \eta_k + a_m \eta_{k+1} = \mathcal{A}^{m-k-1} \alpha \in W.$$

又因 $a_{m-k}\eta_1 + \cdots + a_{m-1}\eta_k \in W$, $a_m \neq 0$, 可得 $\eta_{k+1} \in W$, 矛盾. 因此 \mathcal{A} 的所有不变子空间为零子空间以及 $L(\eta_1, \cdots, \eta_k)$, $k = 1, \cdots, n$.

2. 设 \mathcal{A} 为欧几里得空间的正交变换, 证明: \mathcal{A} 的不变子空间的正交补也是 \mathcal{A} 的不变子空间.

证明: 设 W 是 \mathcal{A} 的不变子空间, 则 $\mathcal{A}(W) \subseteq W$. 由于正交变换必可逆, 因此 $\mathcal{A}(W) = W$.

对于任意的 $\beta \in W^\perp$, $\alpha \in W$, 必存在 $\gamma \in W$ 使 $\alpha = \mathcal{A}\gamma$. 于是

$$(\mathcal{A}\beta, \alpha) = (\mathcal{A}\beta, \mathcal{A}\gamma) = (\beta, \gamma) = 0.$$

这说明 $\beta \in W^\perp$, 故 W^\perp 是 \mathcal{A} 的不变子空间.

3. 设 \mathcal{A} 是线性空间 V 的线性变换, W 为 \mathcal{A} 的不变子空间. 证明: $\mathcal{A}(W)$ 还是 \mathcal{A} 的不变子空间.

证明: 由于 W 是 \mathcal{A} 的不变子空间, $\mathcal{A}(W) \subseteq W$, 因此 $\mathcal{A}(\mathcal{A}(W)) \subseteq \mathcal{A}(W)$, 说明 $\mathcal{A}(W)$ 也是 \mathcal{A} 的不变子空间.

4. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间, \mathcal{A}, \mathcal{B} 是 V 的线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. 证明:

(1) 如果 λ 是 \mathcal{A} 的一个特征值, 那么, V_λ 是 \mathcal{B} 的不变子空间;

(2) \mathcal{A}, \mathcal{B} 至少有一个公共的特征向量.

证明: (1) 对任意的 $\alpha \in V_\lambda$,

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha) = \mathcal{B}(\mathcal{A}\alpha) = \mathcal{B}(\lambda\alpha) = \lambda\mathcal{B}\alpha.$$

因此 $\mathcal{B}\alpha \in V_\lambda$, 说明 V_λ 也是 \mathcal{B} 的不变子空间.

(2) 由上知, V_λ 是 \mathcal{B} 的不变子空间, 从而 $\mathcal{B}|_{V_\lambda}$ 是 V_λ 上的线性变换. 于是 $\mathcal{B}|_{V_\lambda}$ 有特征值 μ 以及相应的特征向量 $\beta \in V_\lambda$, 使

$$\mathcal{B}\beta = \mathcal{B}|_{V_\lambda}(\beta) = \mu\beta.$$

又因 $\beta \in V_\lambda$, $\mathcal{A}\beta = \lambda\beta$. 所以 β 是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 的公共特征向量.