

习题解答

第二章 行列式

习题 2-1

1. 判别下列映射哪些是单映射, 哪些是满映射, 哪些是可逆映射?

$$(1) f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto |a|$$

(2) V 为几何空间, \vec{e} 为一固定的单位向量, 映射

$$\sigma: V \rightarrow V \\ \vec{a} \mapsto \sigma(\vec{a}) = \vec{a} - 2(\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{e}$$

$$(3) f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1$$

解: (1) 非单, 非满, 不可逆.

(2) 单, 满, 可逆.

(2) 单, 非满, 不可逆.

2. 设 f 为集合 S 到集合 S' 的映射, g 为集合 S' 到集合 S'' 的映射, 证明:

(1) 如果 gf 为单映射, 则 f 为单映射;

(2) 如果 gf 为满映射, 则 g 为满映射.

证明: (1) 对任意的 $s_1, s_2 \in S$, 如 $f(s_1) = f(s_2)$, 则 $gf(s_1) = gf(s_2)$. 因 gf 是单映射, 故 $s_1 = s_2$, 从而 f 是单映射.

(2) 对任意的 $s'' \in S''$, 因 gf 是满映射, 故存在 $s \in S$, 使 $gf(s) = s''$, 从而 $s' = f(s) \in S'$, 使 $g(s') = s''$, 故 g 是满映射.

3. 设 f 为集合 S 到集合 S' 的可逆映射, g 为集合 S' 到集合 S'' 的可逆映射, 则 gf 为集合 S 到集合 S'' 的可逆映射, 且 $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

证明: 因为 f 与 g 都可逆, 所以 $f^{-1}g^{-1}$ 是集合 S'' 到 S 的一个映射, 且

$$(f^{-1}g^{-1})(gf) = f^{-1}(g^{-1}g)f = f^{-1}1_{S'}f = f^{-1}f = 1_S,$$

$$(gf)(f^{-1}g^{-1}) = g(ff^{-1})g^{-1} = g1_Sg^{-1} = gg^{-1} = 1_{S''}.$$

习题 2-2

1. 设:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

求 $pq, p^{-1}qp$, 并把 p, q 分别表示成对换的乘积.

解: $pq = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}, p^{-1}qp = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, p = (13)(34)(47)(25)(56),$
 $q = (12)(25)(56)(64)(47)(73)$. (后面两个表示式不唯一).

2. 计算下列置换的逆序数, 并确定其奇偶性:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;
- (3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 9 & 8 & 6 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 7 & 9 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
- (4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$.

解: (1) 逆序数是 8, 偶.

(2) 逆序数是 20, 偶.

(3) 逆序数是 11, 奇.

(4) 逆序数是 n , 奇偶性同 n 的奇偶性.

3. 计算下列排列的逆序数, 并确定其奇偶性:

(1) 5317246; (2) 384576192;

(3) 246813579; (4) 987654321.

解: (1) 逆序数是 9, 奇.

(2) 逆序数是 18, 偶.

(3) 逆序数是 10, 奇.

(4) 逆序数是 36, 偶.

4. 确定 i 及 k , 使

(1) $237i864k5$ 成偶排列; (2) $469k1i752$ 成奇排列.

解: (1) $i = 1, k = 9$.

(2) $i = 8, k = 3$.

5. 计算下列排列的逆序数:

(1) $135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 642$;

(2) $(2n+1)(2n)(2n-1) \cdots 321$.

解: (1) $n(n-1)$.

(2) $n(2n+1)$.

6. 已知置换 p 的逆序数为 a , 求 p^{-1} 的逆序数.

解: a .

7. 已知排列 $x_1x_2 \cdots x_n$ 的逆序数为 a , 求 $x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1$ 的逆序数.

解: 因为 $x_1x_2 \cdots x_n$ 的逆序数 + $x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1$ 的顺序数 = $\frac{n(n-1)}{2}$, 而 $x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1$ 的逆序数 = $x_1x_2 \cdots x_n$ 的顺序数, 所以 $x_nx_{n-1} \cdots x_2x_1$ 的逆序数 = $\frac{n(n-1)}{2} - a$.

*8. 证明: 对任何不超过 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的正整数 k , 必存在逆序数为 k 的 n 阶排列.

证明: 对 k 用数学归纳法.

首先, 当 $k = 1$ 时, $213 \cdots n$ 的逆序数为 1;

假定结论对 $k-1$ 成立 $\left(k \leq \frac{n(n-1)}{2}\right)$, 即存在 n 阶排列

$$i_1i_2 \cdots i_n \quad (1)$$

其逆序数为 $k-1$, 则必存在 $j < k$, 使 $i_j < i_k$ (否则此排列的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$), 从而在 j, k 之间必有两个相邻的编号 $j \leq r < r+1 \leq k$, 使 $i_r < i_{r+1}$. 作排列

$$i_1 \cdots i_{r-1}i_{r+1}i_r i_{r+2} \cdots i_n,$$

则此排列的逆序数 = 排列 (1) 的逆序数 + 1 = k .

由归纳法原理知结论成立.

*9. 在所有 n 阶置换中, 分别有多少个逆序数为 1, 2, 3 的置换?

解: 由排列与置换的关系, 我们只需对排列确定相应的值即可.

当 $k = 1$ 时, 因任意逆序数为 1 的排列都可以由排列 $123 \cdots n$ 交换两个相邻的数而得到, 故逆序数为 1 的排列个数等于 $P_1(n) = n - 1$.

由于任一 n 阶排列都可以由 $n - 1$ 阶排列添加数 n 而得到. 故当 $k = 2$ 时, 逆序数为 2 的排列可由下述方式得到:

(a) $12 \cdots n - 2 \ n - 1 \longrightarrow 12 \cdots n - 3 \ n \ n - 2 \ n - 1$;

(b) $i_1 i_2 \cdots i_{n-1}$ (逆序数 1) $\longrightarrow i_1 i_2 \cdots i_{n-2} \ n \ i_{n-1}$;

(c) $i_1 i_2 \cdots i_{n-1}$ (逆序数 2) $\longrightarrow i_1 i_2 \cdots i_{n-1} \ n$.

所以逆序数为 2 的排列个数为

$$P_2(n) = 1 + P_1(n - 1) + P_2(n - 1).$$

由此可得

$$P_2(n - 1) = 1 + P_1(n - 2) + P_2(n - 2),$$

.....

$$P_2(3) = 1 + P_1(2) + P_2(2),$$

所以 $P_2(n) = (n - 2) + (n - 1) + \cdots + 2 = \frac{(n - 2)(n + 1)}{2}$.

当 $n = 3$ 时, 类似于上面的讨论, 可得

$$P_3(n) = 1 + P_1(n - 1) + P_2(n - 1) + P_3(n - 1),$$

所以

$$P_3(n) - P_3(n - 1) = \frac{(n - 2)(n + 1)}{2},$$

由此可得 $P_3(n) = \frac{n(n^2 - 7)}{6}$.

习 题 2-3

1. 确定下列行列式的项前面所带的符号:

(1) $a_{31}a_{12}a_{23}a_{44}$; (2) $a_{31}a_{23}a_{14}a_{42}a_{65}a_{56}$.

解: (1) +.

(2) +.

2. 下列各项是否为五阶行列式的项 (包括符号)?

(1) $-a_{21}a_{34}a_{15}a_{23}a_{52}$; (2) $+a_{32}a_{15}a_{24}a_{53}a_{41}$.

解: (1) 不是.

(2) 是.

3. 写出四阶行列式中所有带负号且包含因子 a_{23} 的项.

解: $-a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}$, $-a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}$, $-a_{41}a_{12}a_{23}a_{34}$.

4. 在 n 阶行列式中, 两条对角线上各元素的乘积分别应取什么符号?

解: +, $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

5. 证明: $\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} \text{sgn}(i_1 i_2 \cdots i_n) = 0 \ (n \geq 2)$.

证明: 因为在全体 $n \ (n \geq 2)$ 阶排列中, 奇偶排列各占一半, 所以在 $\{\text{sgn}(i_1 i_2 \cdots i_n) \mid i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ 中, 正负号各占一半. 因此 $\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} \text{sgn}(i_1 i_2 \cdots i_n) = 0$.

6. 按定义计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & x \\ x & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (6) \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & 2 & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

解: (1) $acfh + bdeg - adeh - bcfg$.

(2) 0.

(3) $a^5 + x^5$.

(4) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$.

(5) $(-1)^{n-1} n!$.

(6) $n!$.

习题 2-4

1. 用初等行变换将下列矩阵变为上三角形矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix};$$

解: (1) $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 18 & 7 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -16 & 38 & 5 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 用初等列变换将下列矩阵变为下三角形矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -30 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 10 & -11 \\ -1 & 1 & -15 & 8 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解: (1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 19 & 0 & 0 \\ -3 & -35 & -54 & 0 \\ -1 & -30 & 27 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 14 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -14 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

习题 2-5

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} ab & ac & ae \\ bd & -cd & ed \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a & a_4 \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a \end{vmatrix}.$$

解: (1) $4abcdef$.

(2) 48.

(3) 12.

(4) 160.

(5) a^2b^2 .

(6) $(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3)(a - a_4)$.

2. 证明下列等式:

$$(1) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos(2\alpha) \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos(2\beta) \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos(2\gamma) \end{vmatrix} = 0;$$

$$(2) \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

证明: (1) 左边 = $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos(2\alpha) \\ \sin^2 \beta - \cos^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos(2\beta) \\ \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos(2\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos(2\alpha) & \cos^2 \alpha & \cos(2\alpha) \\ -\cos(2\beta) & \cos^2 \beta & \cos(2\beta) \\ -\cos(2\gamma) & \cos^2 \gamma & \cos(2\gamma) \end{vmatrix} = 0.$

(2) 左边 = $2 \begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ a'+b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ a''+b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ a'+b'+c' & -b' & -c' \\ a''+b''+c'' & -b'' & -c'' \end{vmatrix} = \text{右边}.$

(3) 左边 = $\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

习题 2-6

1. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ b & -1 & 0 & 1 \\ c & 0 & 2 & 3 \\ d & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

的第一列各元素的代数余子式.

解: $A_{11} = -1, A_{21} = 1, A_{31} = 2, A_{41} = 2.$

2. 求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

的全部元素的代数余子式.

解: $A_{11} = 7, A_{12} = -12, A_{13} = 3, A_{21} = 6, A_{22} = 4, A_{23} = -1, A_{31} = -5, A_{32} = 5, A_{33} = 5.$

3. 计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \\ b & a & c & d \\ b & a & d & c \end{vmatrix};$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix};$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & 0 & 1 \\ x^3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$ (4) $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix};$

(5) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$

解: (1) 0.

(2) -53.

(3) $-x^3 - x^2 - x + 2.$

(4) $-5x + 2y + 2z + 2t$.

(5) $(ah - bg)(cf - ed)$.

习题 2-7

1. 用克拉默法则解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$$
$$(3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -14, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -11, \\ -2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 20. \end{cases}$$

解: (1) $|A| = 12$, $|B_1| = 24$, $|B_2| = -24$, $|B_3| = 36$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

(2) $|A| = -20$, $|B_1| = |B_2| = |B_3| = |B_4| = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

(3) $|A| = 12$, $|B_1| = 12$, $|B_2| = 24$, $|B_3| = -12$, $|B_4| = -24$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$.

(4) $|A| = -9$, $|B_1| = -9$, $|B_2| = 18$, $|B_3| = -27$, $|B_4| = -9$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$.

2. 求一个二次多项式 $f(x)$, 使 $f(1) = 1$, $f(-1) = 9$, $f(2) = 3$.

解: $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

3. 证明齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + 2^2x_2 + \cdots + 2^n x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ nx_1 + n^2x_2 + \cdots + n^n x_n = 0 \end{cases}$$

仅有零解.

证明: 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix} = 1!2!\cdots n! \neq 0,$$

根据推论 7.2, 原方程只有零解.

习题 2-8

1. 将下列行列式按拉普拉斯定理展开, 以求下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & w & 0 & z \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 16 & 1 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a & b & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & b & a & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{2n}$$

解: (1) 按第 1, 2 两行展开:

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^7 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^8 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 665.$$

(2) $(ax - by)(cz - dw)$.

(3) 按第 1, 2, 3 行展开:

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 10 & 16 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -2.$$

(4) 依次按中间两行展开:

$$\text{原式} = (a^2 - b^2)D_{2(n-1)} = \cdots = (a^2 - b^2)^n.$$

2. 计算下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}, (a \neq b);$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

解: (1) 各行加到第1行, 得 $D = (-1)^{n+2} \cdot (-1)^n = 1$.

(2) 自第1行起, 各行乘以 x 加到下一行:

$$D = (-1)^{n+1}(1 + 2x\cdots + nx^{n-1}) \cdot (-1)^{n-1} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x & a & \cdots & a & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (x-a)D_{n-1},$$

所以

$$D_n = a(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1},$$

又,

$$D_n = D_n^T = a(x-a)^{n-1} + (x+a)D_{n-1},$$

消去 D_{n-1} , 得

$$D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n].$$

(4) 类似于上题, 可得

$$D_n = z(x-y)^{n-1} + (x-z)D_{n-1}.$$

又

$$D_n = D_n^T = y(x-z)^{n-1} + (x-y)D_{n-1}.$$

当 $y \neq z$ 时, 由上两式消去 D_{n-1} , 得

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z}.$$

当 $y = z$ 时, 由递推公式 $D_n = y(x-y)^{n-1} + (x-y)D_{n-1}$, 得 $D_n = (x+(n-1)y)(x-y)^{n-1}$.

(5) 令 $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a+b = \frac{a^2-b^2}{a-b}$, \dots , $\Delta_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$, 则

$$(a+b)\Delta_k - ab\Delta_{k-1} = \Delta_{k+1}.$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \Delta_1 & b\Delta_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} \Delta_1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b - \frac{ab\Delta_0}{\Delta_1} & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_n$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)\Delta_1 - ab\Delta_0 & b\Delta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta_2 & b\Delta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1} = \cdots = \Delta_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

(6)

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (-1) \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$