习 题 解 答

第十一章 多元多项式

习 题 11–1

1. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是数域 K 上的 n 元齐次多项式.

证明: 如果存在数域 K 上的 n 元多项式 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $h(x_1,\cdots,x_n)$, 使

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)h(x_1,\cdots,x_n),$$

则 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $h(x_1,\cdots,x_n)$ 也都是齐次多项式.

证明: 设 $\deg f=m$, $\deg g=k$, $\deg h=l$. 令

$$g=g_p+g_{p+1}+\cdots+g_k,\qquad h=h_q+h_{q+1}\cdots+h_l,$$

其中 g_i,h_j 分别为 i,j 次齐次多项式, 且 g_p,h_q 是分解中次数最低的齐次多项式, $k+l=m$, 则

$$f=g_ph_q+\sum_{t=p+q+1}^{m}\left(\sum_{i+j=t}g_ih_j\right).$$

因此当 $p+q<m$ 时 f 不是齐次多项式. 而 $p+q=k+l=m$ 可推出 $p=k$, $q=l$, 因此 $g=g_k,h=h_l$ 都是齐次多项式.

2. 设 $f(x,y)\in K[x,y]$. 证明: 如果 $f(x,x)=0$, 则 $x-y\mid f(x,y)$.

证明: 设 $f(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x)y^k$, 则

$$\begin{aligned}f(x,y)=f(x,y)-f(x,x)&=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)(y^k-x^k)\\&=(y-x)\sum_{k=1}^{n}a_k(x)(y^{k-1}+y^{k-2}x+\cdots+yx^{k-2}+x^{k-1}).\end{aligned}$$

因此 $x-y\mid f(x,y)$.

***3.** 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix}\dfrac{1}{x_1-a_1}&\dfrac{1}{x_1-a_2}&\cdots&\dfrac{1}{x_1-a_n}\\\dfrac{1}{x_2-a_1}&\dfrac{1}{x_2-a_2}&\cdots&\dfrac{1}{x_2-a_n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\dfrac{1}{x_n-a_1}&\dfrac{1}{x_n-a_2}&\cdots&\dfrac{1}{x_n-a_n}\end{vmatrix}.$$

解: 把原行列式记为 $D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)$. 则

$$D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=\frac{G(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)}{F(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)},$$

其中 G 与 F 都是 $x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n$ 的多项式. 易知

$$F(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-a_j).$$

由于

$$D_n(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_i,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=0,\qquad D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_i,\cdots,a_n)=0,$$

可得

$$G(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\cdot G_1(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n).$$

比较两边 x_i 与 a_j 的次数 (都是 $n-1$ 次), 可知 $G_1=c_n$ 是一个常数. 因此

$$D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\cdot c_n}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-a_j)}.$$

又因

$$[(x_n-a_n)D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)]_{x_n=a_n}=D_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1},a_1,\cdots,a_{n-1}),$$

所以

$$\frac{\left(\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_i-x_j)\right)(x_1-a_n)\cdots(x_{n-1}-a_n)\left(\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(a_j-a_i)\right)(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})\cdot c_n}{\left(\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}(x_i-a_j)\right)(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})(x_1-a_n)\cdots(x_{n-1}-a_n)}$$

$$=\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_i-x_j)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(a_j-a_i)\cdot c_n}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}(x_i-a_j)}=D_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1},a_1,\cdots,a_{n-1}),$$

可得 $c_n=c_{n-1}$. 依此类推, 最终可得 $c_n=c_1=1$. 因而

$$D_n(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_n)=\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)(a_j-a_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-a_j)}.$$

习 题 11–2

1. 用初等对称多项式表示下列对称多项式:

(1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;

(2) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2$;

(3) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

(4) $(x_1x_2+x_3)(x_1x_3+x_2)(x_2x_3+x_1)$;

(5) $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$;

(6) $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$.

解: (1) 原式 $=x_1x_2(x_1+x_2+x_3)+x_1x_3(x_1+x_2+x_3)+x_2x_3(x_1+x_2+x_3)-3x_1x_2x_3=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$.

(2)

2	2	0	0	σ_2^2
2	1	1	0	$\sigma_1\sigma_3$
1	1	1	1	σ_4

因此原式 $=\sigma_2^2+A\sigma_1\sigma_3+B\sigma_4$.

取 $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=0$, 得 $3=9+3A$, $A=-2$;

取 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$, 得 $B=2$;

故原式 $=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$.

(3) 原式 $=(\sigma_1-x_3)(\sigma_1-x_2)(\sigma_1-x_1)=\sigma_1^3-\sigma_1\sigma_1^2+\sigma_2\sigma_1-\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$.

(4) 原式 $=\dfrac{1}{\sigma_3}(\sigma_3+x_3^2)(\sigma_3+x_2^2)(\sigma_3+x_1^2)$. 由于

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$

$$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3,$$

$$x_1^2x_2^2x_3^2=\sigma_3^2,$$

$$\begin{aligned}\text{原式 }&=\frac{1}{\sigma_3}(\sigma_3^3+(\sigma_1-2\sigma_2)\sigma_3^2+(\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3)\sigma_3+\sigma_3^2)\\&=\sigma_1^2\sigma_3-2\sigma_1\sigma_3+\sigma_2^2-2\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2+\sigma_3.\end{aligned}$$

(5) 原式$=(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_3^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1^2)$
$=(\sigma_1^2-2\sigma_2-x_3^2)(\sigma_1^2-2\sigma_2-x_2^2)(\sigma_1^2-2\sigma_2-x_1^2)$
$=(\sigma_1^2-2\sigma_2-x_3^2)^3-(\sigma_1^2-2\sigma_2-x_3^2)(\sigma_1^2-2\sigma_2-x_3^2)^2+(\sigma_1^2-2\sigma_1\sigma_3)(\sigma_1^2-2\sigma_2-x_3^2)-\sigma_3^2$
$=\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1^3\sigma_3-2\sigma_2^3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2$

(6) 原式$=\frac{1}{\sigma_3}[(\sigma_3+\sigma_2)^3-\sigma_2(\sigma_3+\sigma_2)^2+\sigma_1\sigma_3(\sigma_3+\sigma_2)-\sigma_3^2]$
$=\frac{1}{\sigma_3}[\sigma_3(\sigma_3+\sigma_2)^2+\sigma_1\sigma_3(\sigma_3+\sigma_2)-\sigma_3^2]$
$=\sigma_2^2+2\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_1\sigma_2-\sigma_3^2.$

2. 用初等对称多项式表示下列 n 元对称多项式:

(1) $\sum x_1^4$;　　(2) $\sum x_1^2x_2^2$;

(3) $\sum x_1^2x_2x_3$;　　(4) $\sum x_1^2x_2^2x_3x_4$.

解: (1) $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_2-4\sigma_4$.

(2) $\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$.

(3) $\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$.

(4) $\sigma_2\sigma_4-4\sigma_1\sigma_5+9\sigma_6$.

3. 设 x_1,x_2,x_3 是方程 $3x^3-5x^2+1$ 的三个根. 计算

$$x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_1^3x_3+x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3.$$

解: 原式 $=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3=\frac{5}{9}$.

4. 设 $xyz\neq 0$, 且 $x+y+z=0$, 求:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}.$$

解: 原式$=\frac{1}{xyz}(x^2z+y^2z+x^2y+yz^2+xy^2+xz^2)$
$=\frac{1}{xyz}((x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz)$
$=-3.$

5. 证明: 三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个根成等差数列的充分必要条件是

$$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0.$$

证明: 三个根成等差数列的充分必要条件是以下 3 个数

$$x_1+x_2-2x_3,\quad x_1+x_3-2x_2,\quad x_2+x_3-2x_1,$$

中至少有一个等于 0. 故

$$\text{三个根成等差数列} \iff (x_1+x_2-2x_3)(x_1+x_3-2x_2)(x_2+x_3-2x_1)=0.$$

而

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2-2x_3)(x_1+x_3-2x_2)(x_2+x_3-2x_1)\\&=(x_1+x_2+x_3-3x_3)(x_1+x_2+x_3-3x_2)(x_1+x_2+x_3-3x_1)\\&=(-a_1)^3-3(-a_1)(-a_1)^2+9a_2(-a_1)-27(-a_3)\\&=2a_1^3-9a_1a_2+27a_3.\end{aligned}$$

6. 若 n 次多项式 $f(x)$ 的根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 而数 c 不是 $f(x)$ 的根, 证明:

$$\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i-c}=-\frac{f'(c)}{f(c)}.$$

证明: 考察多项式 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, 则

$$f'(x)=\sum_{i=1}^n\frac{f(x)}{x-x_i},\qquad\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^n\frac{1}{x-x_i},$$

从而

$$\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i-c}=-\frac{f'(c)}{f(c)}.$$

*__7.__ 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的根, 证明: $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的对称多项式可表成 x_1 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式.

证明: 设

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=\sum_{k=0}^n(-1)^ka_kx^{n-k}.$$

从而

$$\begin{aligned}(x-x_2)\cdots(x-x_n)&=\frac{f(x)}{x-x_1}=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\\&=\frac{\sum\limits_{k=0}^n(-1)^ka_kx^{n-k}-\sum\limits_{k=0}^n(-1)^ka_kx_1^{n-k}}{x-x_1}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^ka_k(x^{n-k-1}+x^{n-k-2}x_1+\cdots+x^{n-n-1}).\end{aligned}$$

由最后一式知 x 的各次项系数都是 x_1 与 $a_1,\cdots,a_n$ 的多项式 $(a_0=1)$, 从而 $x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式是 x_1 与 $a_1,\cdots,a_n$ 的多项式, 进而由对称多项式基本定理知 $x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式可表成是 x_1 与 $a_1,\cdots,a_n$ 的多项式.

*__8.__ 设

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\\&=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n,\\s_k&=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k,\quad(k=0,1,2,\cdots).\end{aligned}$$

(1) 证明:

$$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x),$$

其中 $g(x)$ 的次数 $<n$ 或 $g(x)=0$.

(2) 证明**牛顿 (Newton) 公式**:

$$s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k k\sigma_k=0 \quad k\leqslant n,$$
$$s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n s_{k-n}=0 \quad k>n.$$

证明: 设 $g(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^{k+1}f(x)}{x-x_i}$, 则 $g(x)=0$ 或 $\deg g(x)<n$. 而

$$\begin{aligned}x^{k+1}f'(x)-g(x)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}f(x)}{x-x_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}f(x)}{x-x_i}=\left(\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{x-x_i}\right)f(x)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k}(x^{k-j}x_i^{j}f(x)=\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}(x^{k-j}x_i^{j}\right)f(x)\\&=\left(\sum_{j=0}^{k}x^{k-j}s_j\right)f(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x).\end{aligned}$$

即得所证.

(2) 比较等式

$$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x)$$

两边 n 次项系数, 由于 $g(x)$ 的次数 $<n$ 或 $g(x)=0$, 所以

$$x^{k+1}f'(x)\text{ 的 }n\text{ 次项系数}=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)\text{ 的 }n\text{ 次项系数},$$

所以当 $k\leqslant n$ 时,

$$(n-k)(-1)^k\sigma_k=s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^k\sigma_k s_0,$$

即

$$s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k k\sigma_k=0.$$

当 $k>n$,

$$0=s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_n s_{k-n},$$

即得所证.

*__9.__ 用初等对称多项式表示 s_2,s_3,s_4,s_5.

解: $s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$,

$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$,

$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$,

$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$.

习 题 11–3

1. 证明结式的下列性质: 设 $f(x),g(x)$ 分别是 n 次与 m 次多项式. 则

(1) $\operatorname{Res}(f,g)=(-1)^{mn}\operatorname{Res}(g,f)$;

(2) $\operatorname{Res}(af,bg)=a^m b^n\operatorname{Res}(f,g)$;

(3) $\operatorname{Res}((x-a)f,g)=g(a)\operatorname{Res}(f,g)$.

证明: (1), (2) 显然. 今证 (3). 设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\qquad g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m,$$

则

$$(x-a)f(x)=a_0x^{n+1}+(a_1-a_0a)x^n+\cdots+(a_n-a_{n-1}a)x-a_na.$$

$$\operatorname{Res}((x-a)f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1-a_0a & a_2-a_1a & \cdots & a_n-a_{n-1}a & -a_na & & \\ & a_0 & a_1-a_0a & a_2-a_1a & \cdots & a_n-a_{n-1}a & -a_na & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n-a_{n-1}a & -a_na \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{vmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\}n\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\}m+1\end{matrix}$$

自第一列起, 各列乘 a 加到后一列, 直至最后一列, 可得

$$\operatorname{Res}((x-a)f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & 0 \\ b_0 & b_1+b_0a & b_2+b_1a+b_0a^2 & \cdots & \cdots & g(a) & \cdots & g(a)a^m \\ & b_0 & b_1+b_0a & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & g(a)a^{m-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & g(a) \end{vmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\}n\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\}m+1\end{matrix}$$

从最后一行起, 各行乘 $(-a)$ 加到前一行, 直到第 $n+1$ 行, 再按最后一列展开, 可得

$$\operatorname{Res}((x-a)f,g)=g(a)\operatorname{Res}(f,g).$$

2. 设 $f(x)=a(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, $g(x)=b(x-y_1)\cdots(x-y_m)$.

证明: $\operatorname{Res}(f,g)=a^m\prod\limits_{i=1}^{n}g(x_i)=(-1)^{mn}b^n\prod\limits_{j=1}^{m}f(y_j)=a^mb^n\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m}(x_i-y_j)$.

证明:
$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,g)&=a^m\operatorname{Res}((x-x_1)\cdots(x-x_n),g(x))\\ &=a^mg(x_1)\operatorname{Res}((x-x_2)\cdots(x-x_n),g(x))\\ &=a^mg(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)\\ &=a^mb^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i-y_j)=(-1)^{mn}b^n\prod_{j=1}^{m}f(y_j).\end{aligned}$$

3. 证明: $\operatorname{Res}(f(x),g_1(x)g_2(x))=\operatorname{Res}(f(x),g_1(x))\operatorname{Res}(f(x),g_2(x))$.

证明: 设

$$g_1(x)=a_0(x-a_1)\cdots(x-a_n),\quad g_2(x)=b_0(x-b_1)\cdots(x-b_m),$$

则

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,g_1g_2)&=(-1)^{\deg f(\deg g_1g_2)}\operatorname{Res}(g_1g_2,f)\\ &=(-1)^{\deg f(\deg g_1g_2)}a_0^{\deg f}b_0^{\deg f}\prod_{i=1}^{n}f(a_i)\prod_{j=1}^{m}f(b_j)\\ &=(-1)^{\deg f(\deg g_1g_2)}\operatorname{Res}(g_1,f)\operatorname{Res}(g_2,f)\\ &=\operatorname{Res}(f,g_1)\operatorname{Res}(f,g_2).\end{aligned}$$

4. 设 f 为首一多项式, 证明: 对任意多项式 h, $\operatorname{Res}(f,g)=\operatorname{Res}(f,g+hf)$.

证明: 设 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, $m=\deg g$, 则

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,g+hf)&=\prod_{i=1}^{n}(g(x_i)+h(x_i)f(x_i))\\&=\prod_{i=1}^{n}g(x_i)=\operatorname{Res}(f,g).\end{aligned}$$

5. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in K[x]$,

证明: $f(x)$ 的判别式

$$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-1}\operatorname{Res}(f,f').$$

证明: $D(f)=a_0^{2n-2}\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-2}\prod\limits_{i\neq j}(x_i-x_j)$

$$\begin{aligned}&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-2}\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{n-2}\prod_{i=1}^{n}f'(x_i)\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{n-2}\operatorname{Res}((x-x_1)\cdots(x-x_n),f')\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-1}\operatorname{Res}(f,f').\end{aligned}$$

6. 计算下列多项式的结式:

(1) $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$, $g(x)=2x^2-x-1$;

(2) $f(x)=2x^3-3x^2-x+2$, $g(x)=x^4-2x^3-3x+4$;

(3) $f(x)=x^n+x+1$, $g(x)=x^2-3x+2$;

(4) $f(x)=x^n+1$, $g(x)=(x-1)^n$;

(5) $f(x)=\dfrac{x^n-1}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{x^m-1}{x-1}$;

(6) $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,

$g(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}$.

解: (1) $\operatorname{Res}(f,g)=(-1)^{2\cdot 3}\operatorname{Res}(2x^2-x-1,f)=(-1)^6\cdot 2^3\cdot f\left(-\dfrac{1}{2}\right)f(1)=-7$.

(2) $f(x),g(x)$ 有公共根 1, 所以结式 $\operatorname{Res}(f,g)=0$.

(3) $\operatorname{Res}(f,g)=(-1)^{2n}(1+1+1)(2^n+2+1)=3(2^n+3)$.

(4) $\operatorname{Res}(f,g)=(-1)^n\cdot 2^n$.

(5) (a) 如 $(m,n)=d>1$, 则 $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ 与 $\dfrac{x^m-1}{x-1}$ 有公共根, 因此 $\operatorname{Res}(f,g)=0$.

(b) 如 $(m,n)=1$, 不妨设 $n>m$, 则 $n=mq+r$, $0\leqslant r<m$. 显然 $(m,r)=1$. 则

$$\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{x^{mq}x^r-1}{x-1}=\frac{(x^{mq}-1)x^r+x^r-1}{x-1},$$

从而

$$\operatorname{Res}\left(\frac{x^n-1}{x-1},\frac{x^m-1}{x-1}\right)=(-1)^{m-1)(n+r)}\operatorname{Res}\left(\frac{x^r-1}{x-1},\frac{x^m-1}{x-1}\right).$$

我们证明 $(m-1)(n+r)$ 一定是偶数.

如 $m-1$ 是偶数, 则结论成立. 现设 $m-1$ 是奇数, 则 m 为偶数, 从而 n 是奇数, r 也是奇数, 于是 $n+r$ 是偶数. 从而

$$\operatorname{Res}\left(\frac{x^n-1}{x-1},\frac{x^m-1}{x-1}\right)=\operatorname{Res}\left(\frac{x^r-1}{x-1},\frac{x^m-1}{x-1}\right).$$

再用 r 除 m, 根据辗转相除法的原理, 由 $(m,r)=1$ 可得

$$\operatorname{Res}\left(\frac{x^r-1}{x-1},\frac{x^m-1}{x-1}\right)=\cdots=\operatorname{Res}\left(\frac{x^{r'}-1}{x-1},1\right)=1.$$

即当 $(m,n)=1$ 时 $\operatorname{Res}\left(\frac{x^n-1}{x-1},\frac{x^m-1}{x-1}\right)=1$.

(6) 由于 $f(x)=xg(x)+a_n$, 所以

$$\operatorname{Res}(f,g)=(-1)^{n(n-1)}\operatorname{Res}(g,f)=(-1)^{n(n-1)}\operatorname{Res}(g,a_n)=a_n^{n-1}.$$

7. 当 λ 取何值时, 下列多项式有公共根:

(1) $f(x)=x^3-\lambda x+2$, $g(x)=x^2+\lambda x+2$;

(2) $f(x)=x^3+\lambda x^2-9$, $g(x)=x^3+\lambda x-3$.

解: (1) $\operatorname{Res}(f,g)=-4(\lambda+1)^2(\lambda-3)$, 故当 $\lambda=-1$ 或 3 时有公共根.

(2) $\operatorname{Res}(f,g)=9(\lambda^2+12)(\lambda^2+2)$, 故当 $\lambda=\pm2\sqrt{3}\mathrm{i}$ 或 $\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$ 时有公共根.

8. 求下列曲线的直角坐标方程:

(1) $x=t^2+t-1$, $y=2t^2+t-1$;

(2) $x=\frac{t-1}{t^2+1}$, $y=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}$.

解: (1) $4x^2-4xy+y^2+5x-3y+1=0$.

(2) $5x^2-6xy+2y^2+5x-3y+1=0$.

9. 当 λ 为何值时, 下列多项式有重根?

(1) $f(x)=x^3-3x+\lambda$; (2) $f(x)=x^4-4x^3+(2-\lambda)x^2+2x-2$.

解: (1) $2,-2$;

(2) $-1,-\frac{3}{2},\frac{7}{2}+\frac{9}{2}\sqrt{3}\mathrm{i},\frac{7}{2}-\frac{9}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$.

10. 求下列方程组的解:

(1) $\begin{cases}5x^2-6xy+5y^2=16,\\ 2x^2-xy+y^2-x-y=4;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2+y^2+4x-2y=-3,\\ x^2+4xy-y^2+10y=9.\end{cases}$

解: (1) $\operatorname{Res}_y(f,g)=32(y^4-y^3-3y^2+y+2)$,

$$\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$$

(2) $\operatorname{Res}_x(f,g)=4(5x^4+40x^3+106x^2+104x+33)$,

$$\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}\quad\begin{cases}x=-3\\ y=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2+\frac{3}{5}\sqrt{5}\\ y=1+\frac{1}{5}\sqrt{5}\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2-\frac{3}{5}\sqrt{5}\\ y=1-\frac{1}{5}\sqrt{5}\end{cases}$$

11. 求下列圆锥曲线的交点坐标:

(1) 圆 $x^2+y^2-3x-y=0$ 与双曲线 $x^2+2xy-y^2-4y-2=0$;

(2) 双曲线 $4x^2-7xy+y^2+13x-2y-3=0$ 与双曲线 $9x^2-14xy+y^2+28x-4y-5=0$.

解: (1) $(1,-1),\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right),\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)$;

(2) $(0,-1),(1,2),(2,3),(-2,1)$.